
Illuminationsprobleme
Rationaler Polygone

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Education

an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Betreuerin: Dr. Anja Randecker
Zweitkorrektor: Prof. Peter Albers

Name: Kirsten Rheinberger
Matrikelnummer: 4011149
Fakultät: Mathematik und Informatik
Studiengang: Master of Education Mathematik und Chemie
Abgabetermin: 13. November 2023

Eidesstattliche Erklärung

Ich gebe hiermit die eidesstattliche Erklärung ab, dass ich meine Masterarbeit mit dem Titel Illuminationsprobleme rationaler Polygone selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und alle wörtlichen oder sinngemäß übernommenen Textstellen als solche kenntlich gemacht habe.

Mir ist bekannt, dass die ungekennzeichnete Übernahme fremder Texte – auch aus dem Internet – als Täuschung gewertet wird und die entsprechende Prüfungsleistung als nicht erbracht gilt (Master- Prüfungsordnung § 8,4 und § 22, 4).

Hiermit stimme ich zu, dass meine Masterarbeit von Bibliotheksnutzern eingesehen werden darf. Ja Nein

Sinsheim, Datum

Unterschrift der Kandidatin

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Abstract.....	2
1 Fachlicher Teil.....	4
1.1 Billards als dynamische Systeme	5
1.1.1 Polygone als spezielle Billards	5
1.1.2 Translationsflächen.....	9
1.2 Minimalität von Flüssen und Definition metrischer Zylinder	15
1.3 Illuminationsproblem	19
1.3.1 Origamis	21
1.3.2 Gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke	22
1.3.3 Translationsfläche des Polygons aus Abbildung 1.12	25
1.3.4 Allgemeinere Dreiecke	32
2 Fachdidaktischer Teil	34
2.1 Theoretischer Hintergrund	34
2.1.1 Problemlösen beim mathematischen Lernen	34
2.1.2 Weltbilder der Mathematik.....	35
2.1.3 Digitale Medien beim mathematischen Lernen	36
2.2 Planung des Workshops über Illuminationsprobleme	38
2.2.1 Bildungspläne	38
2.2.2 Kontext: Mathematik-Informatik-Station (MAINS)	38
2.2.3 Detaillierte Planung des Ablaufs	38
2.3 Durchführung des Workshops über Illuminationsprobleme	41
2.3.1 Beschreibung der Lernenden-Gruppe	41
2.3.2 Ablauf des Workshops	41
2.3.3 Beobachtungen während des Workshops	41
2.4 Evaluation des Workshops	43
2.4.1 Fragebögen	43
2.4.2 Ergebnisse	44
2.4.3 Diskussion	46
Literatur	47

Anhang	49
A.1 Fachdidaktischer Teil	49

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich gerne bei allen Personen bedanken, die mich beim Schreiben meiner Masterarbeit unterstützt haben.

Mein Dank gilt insbesondere Frau Dr. Randecker für die große Hilfsbereitschaft während dieser Zeit. Sie stand mir bei Fragen immer zur Verfügung und hat mich bei unseren vielen Treffen, die wir seit Juli abgehalten haben, immer sehr gut unterstützt. Danke auch für die Flexibilität, bei Bedarf auf online Meetings auszuweichen, wovon eins sogar aus den USA stattgefunden hat.

Ein weiteres Dankeschön an Herrn Prof. Peter Albers für die Zweitkorrektur meiner Arbeit.

Für die Hilfe bei der Planung und Organisation des Workshops möchte ich mich herzlich bei Frau Prof. Friesen bedanken, die mit wertvollen Tipps und Anregungen in dieser Phase zu meinem fachdidaktischen Teil beigetragen hat.

Während und vor der Durchführung des Workshops in der MAINS hat mich Volker Gaibler unterstützt, wofür ich ihm sehr dankbar bin.

Danke auch an meine Eltern und den Rest der Familie, die während meines kompletten Studiums in den Höhen und Tiefen an mich geglaubt haben.

Abstract

Ich habe meine Masterarbeit der Mathematik zum Illuminationsproblem rationaler Polygone verfasst. Der Ursprung dieses Themas liegt in zwei interessanten Fragestellungen, die in den 1950er Jahren von Ernst Straus formuliert wurden: Kann ein gegebenes polygonales Gebiet von jedem Punkt des Gebiets aus beleuchtet werden?

Ist jedes polygonale Gebiet von mindestens einem Punkt aus beleuchtbar?

Betrachtet werden dabei Gebiete mit verspiegelten Wänden und einer Lichtquelle im Inneren. Bei der Bearbeitung dieser Fragen gehe ich zunächst allgemein auf Billards als dynamische Systeme ein, danach beschränke ich mich auf polygonale Billards. Für diese betrachte ich zusätzlich ihre Translationsflächen. In einem nächsten Abschnitt analysiere ich die Ergodizität in Billards. Abschließend erfolgt die Diskussion des Illuminationsproblems, wobei ausschließlich rationale Polygone betrachtet werden. Hierbei erkläre ich zunächst allgemeine Begriffe, um dann den Fokus auf Polygone aus rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken zu legen. Es existieren Polygone aus solchen Dreiecken, bei denen sich zwei Punkte nicht gegenseitig beleuchten. Ein solches wird detailliert analysiert und unter anderem dessen Translationsfläche bestimmt. Für diese stelle ich auch den Zusammenhang zu Veech-Flächen her, wodurch Aussagen über die Ergodizität des dynamischen Systems getroffen werden können.

Da ich Mathematik auf Lehramt studiere, war bei mir persönlich das Interesse sehr groß, auch einen fachdidaktischen Teil in meiner Masterarbeit zu behandeln. Dieser Wunsch wurde durch einen Workshop zum Illuminationsproblem erfüllt. Ich habe diesen selbst konzipiert und dann an der MAINS in Heidelberg mit einer Schülergruppe durchgeführt. Die Schulklasse hat dort die Ausstellung zu den Spiegelwelten besucht und im Anschluss gemeinsam mit mir im Workshop geforscht. Wie ich diesen Workshop geplant habe und was für theoretische Überlegungen hinter den verwendeten Methoden stehen, wird im fachdidaktischen Teil der Arbeit beschrieben. Das fachdidaktische Kapitel beginnt mit einer theoretischen Einführung zu den Themen Problemlösen beim mathematischen Lernen, Weltbilder der Mathematik und digitale Medien beim mathematischen Lernen. Hier

gebe ich eine inhaltliche Einführung, da diese Theorien während der Beschreibung der Durchführung des Workshops und der Evaluation wieder aufgegriffen werden. In einem nächsten Abschnitt gehe ich auf die Planung des Workshops ein, um dann in die Durchführung dessen überzugehen. Dabei werden auch Beobachtungen beschrieben, welche während des Workshops gemacht wurden und im Anschluss erfolgen die Auswertung der Evaluation und die Diskussion der Ergebnisse. Interessant war für mich dabei der Umgang der Lernenden mit dem Problemlösen. Da ich die Klasse zuvor nicht kannte, konnte ich nicht einschätzen, inwiefern die Lernenden mit solchen Aufgabentypen vertraut sind. Der Workshop ging als Exkurs thematisch über das Schulcurriculum hinaus, daher war es aufschlussreich, das mathematische Weltbild der Schülerinnen und Schüler in der Evaluation zu hinterfragen. Man erwartet dabei, dass viele Lernende mathematisches Wissen nur für sinnvoll erachten, wenn sie dieses auch für ihren Mathematikunterricht benötigen. Was darüber hinausgeht wird von vielen als unnötig oder lästig angesehen. Durch die Evaluation hat sich diese Erwartung teilweise bestätigt, jedoch hat vor allem die Arbeit mit digitalen Medien auch zu gesteigertem Interesse seitens der Lernenden geführt.

Fachlicher Teil

Das Illuminationsproblem wurde in den 1950ern von Ernst Straus formuliert. Er teilte das Problem in zwei Fragestellungen auf und ging darauf ein, ob ein polygonales Gebiet von jedem Punkt des Gebiets aus beleuchtbar ist, beziehungsweise ob jedes polygonale Gebiet von mindestens einem Punkt aus beleuchtbar ist. Die Gebiete, von denen in diesen Abschnitten die Rede ist, haben verspiegelte Wände und werden im Inneren von einer einzelnen Lichtquelle beleuchtet, welche Lichtstrahlen in alle Richtungen aussendet. Dass ein Punkt eines Gebiets ausgehend von der Lichtquelle nicht beleuchtbar ist, bedeutet, dass es keine Billard-Trajektorie zwischen diesen beiden Punkten gibt. Eine Billard-Trajektorie ist eine Gerade, welche zwei Punkte des Gebiets miteinander verbindet. Diese Gerade wird an den Kanten des Gebiets nach dem Reflexionsgesetz gespiegelt, sobald sie an diesen auftrifft. Die Situation kann daher gleichartig zu der Betrachtung mit Lichtstrahlen auch als Billardtisch gesehen werden, bei dem die Kugelstöße die Analoga zu den Lichtstrahlen bilden. In den Gebieten gilt das Reflexionsgesetz, welches besagt, dass Ein- und Ausfallwinkel gleich groß sind. Lichtstrahlen, die eine Ecke treffen, werden dort absorbiert und enden somit. [Tok95]

1.1 Billards als dynamische Systeme

Ein gängiges Beispiel für ein dynamisches System ist eine Menge von Billard-Kugeln. Diese bewegen sich durcheinander auf Geraden, bis es zum Zusammenstoß kommt. Dieser Zusammenstoß kann mit einer anderen Billard-Kugel oder mit der Wand erfolgen. Dabei werden nur paarweise Zusammenstöße in Betracht gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Kugeln gleichzeitig zusammenstoßen, ist so gering, dass dieser Fall vernachlässigt werden kann. [Lub91, S. 255]

1.1.1 Polygone als spezielle Billards

Betrachtet man Billards, so wird der zuvor beschriebene Fall auf den Zusammenstoß einer Kugel mit der Wand beschränkt. Billards sind Gebiete, die durch eine unverformbare Wand beschränkt sind. In diesen Gebieten bewegen sich Kugeln gradlinig fort und stoßen während ihrer Bewegung an die Wand. Dieses Kapitel wurde auf Grundlage von [MT02, S. 1019–1022] verfasst.

Entfaltung von Polygonen

In diesem Abschnitt wird die Entfaltung von Polygonen beschrieben. Diese führt uns zu einer übersichtlicheren Darstellung einer Billard-Trajektorie. Besonders für lange Trajektorien, die oft an den Seiten des Polygons gespiegelt werden, kann dies sehr nützlich sein.

Jeder geodätische Pfad innerhalb eines gegebenen Polygons kann auch als Pfad in der Vereinigung der Spiegelbilder des Polygons betrachtet werden.

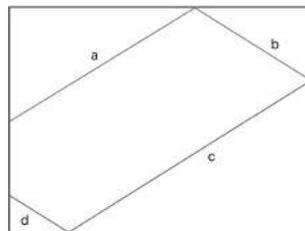


Abbildung 1.1. Beispiel für das Ausgangspolygon mit einer Billard-Trajektorie

Dabei wird das Ausgangspolygon immer wieder an der Seite gespiegelt, an der der betrachtete Pfad auftritt. Dadurch verlaufen die Pfade gradlinig durch das entstehende größere Polygon.

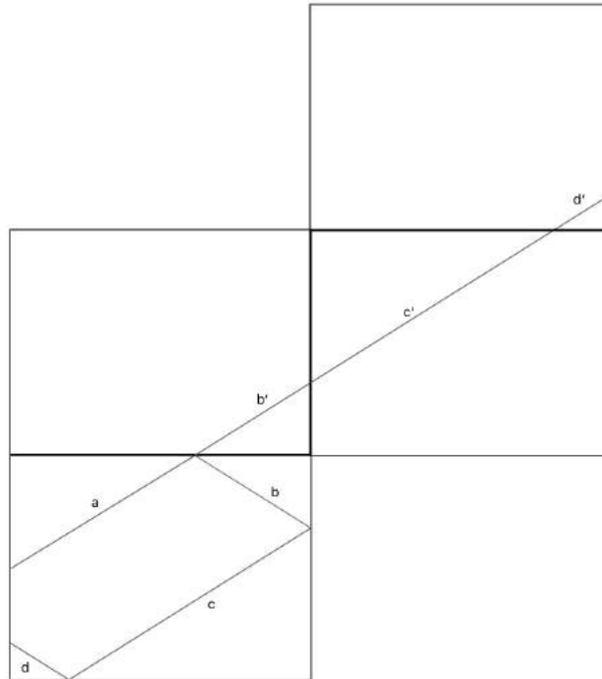


Abbildung 1.2. Beispiel für das entfaltete Ausgangspolygon

Definition 1.1 (Rationale Polygone). Ein Polygon Q wird als rational bezeichnet, wenn alle Innenwinkel von Q rationale Vielfache von π sind. Ansonsten nennen wir Q irrational.

Die Spiegelung rationaler Polygone führt nach einer gewissen Anzahl an Wiederholungen wieder zu einem Polygon, das bis auf Verschiebung identisch ist. Betrachten wir als Beispiel eine Ecke des Polygons mit dem Winkel $\alpha = \pi/n$. Führen wir an beiden Seiten, die an dieser Ecke aufeinander treffen, nacheinander eine Spiegelung S_1 und S_2 durch, so erhalten wir durch S_1S_2 eine Drehung um $2\alpha = 2\pi/n$. Damit folgt, dass nach n Wiederholungen wieder der Ausgangszustand erreicht ist: $(S_1S_2)^n = id$. Der Stabilisator dieser Ecke hat somit Ordnung n . Eine gegebene Billard-Trajektorie kann dann nur eine endliche Anzahl an möglichen Richtungen haben, wie sie verlaufen kann. Da irrationale Polygone nicht ausschließlich rationalen Anteile von π als Winkelgrößen besitzen, kommt man durch gewisse Spiegelungen nicht zurück zum Ausgangszustand und die Ordnung von S_1S_2 und somit auch dieses Stabilisators ist unendlich.

Wir können das Vorgehen auch gruppentheoretisch betrachten: Gegeben sei ein Polygon Q , welches eine Billard-Trajektorie enthält. Sei $A(Q)$ die Gruppe, welche von allen möglichen Spiegelungen an Seiten von Q erzeugt ist. Die Spiegelung an einer gegebenen Seite, beispielsweise die Seite s , wird mit σ_s bezeichnet. Folglich ist jedes Spiegelbild von Q das Bild eines Elements aus $A(Q)$. Nach einer geraden Anzahl von Operationen können das Ausgangspolygon und das Entstandene potentiell zur Deckung gebracht werden, nach einer ungeraden Anzahl von Operationen ist dies nicht möglich, da die Ausrichtungen nicht übereinstimmen. Sobald

ein Polygon erhalten wurde, das mit dem Ausgangspolygon zur Deckung gebracht werden kann, werden entlang der jeweiligen Spiegelachsen zweier Spiegelbilder die parallelen Seiten der Polygone miteinander verklebt. Dies wird für alle Spiegelbilder durchgeführt, wodurch eine große zusammenhängende Fläche erhalten wird. Diese wird im folgenden Kapitel ausführlicher behandelt.

Es kann das Bild von $A(Q)$ in $GL(2, \mathbb{R})$ betrachtet werden, welches die linearen Anteile der Gruppe $A(Q)$ enthält, damit ist $G(Q)$ eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe.

Lemma 1.2 *Wenn Q rational ist, folgt dass die Untergruppe $G(Q)$ die Diedergruppe eines regelmäßigen Polygons ist. [MT02, S. 1020]*

Beispiel 1.3 Die Spiegelungen eines Quadrats Q führt zu einer Geraden in der Ebene, welche durch Einheitsquadrate unterteilt wird. Diese Quadrate entstehen durch Spiegelungen aus der Gruppe $A(Q)$. Zwei Geraden aus der Ebene gehören zur selben Billard-Trajektorie, wenn sie sich nur durch eine Translation durch einen Vektor aus der Gruppe $2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ unterscheiden. Das Quadrat stellt den Fundamentalbereich der Gruppe $2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ da. Der Fundamentalbereich von $2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ repräsentiert eine Entfaltung, welche aus vier Kopien von Q zusammengesetzt ist. Wenn wir die einander gegenüber liegenden Seiten dieses Quadrats miteinander verkleben, erhalten wir einen glatten Torus, dieser Vorgang ist in Abbildung 1.3 dargestellt.

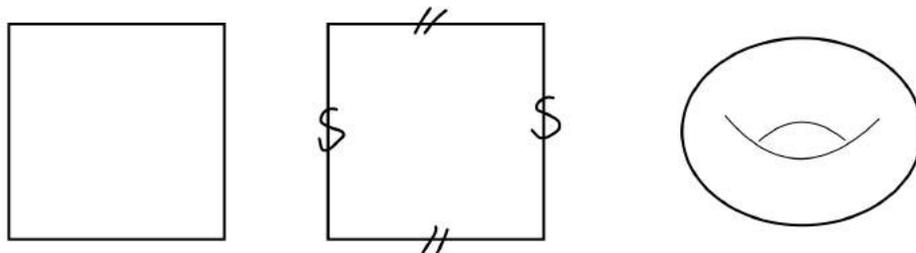


Abbildung 1.3. Verklebung eines Quadrats zu einem Torus

Dadurch wird eine gegebene Billard-Trajektorie zu einer Geodätischen auf dem entstandenen Torus, jede solche Geodätische hat eine konstante Steigung λ . Sofern λ rational ist, ist die gegebene Billard-Trajektorie periodisch, andernfalls ist sie dicht im Torus (dies wird in Satz 1.21 bewiesen). Bei der näheren Betrachtung von periodischen Billard-Trajektorien können wir feststellen, dass diese nach der Entfaltung Elemente ergeben, deren Endpunkte sich durch Vektoren aus $2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ unterscheiden. Eine zu einer gegebenen Billard-Trajektorie parallele Trajektorie ist immer auch periodisch und hat die gleiche Länge. Unter der Annahme, dass eine entfaltete periodische Billard-Trajektorie vom Ursprung des Gitters (aus Kopien von Q) bis zum Punkt $(2p, 2q)$ geht, können wir die folgenden Aussagen treffen:

Wenn p und q teilerfremd sind, so ist die Trajektorie einfach, die Länge der Trajektorie kann durch $2\sqrt{p^2 + q^2}$ berechnet werden.

Definition 1.4 (Integrierbare Polygone). Polygone, welche als integrierbar bezeichnet werden, lassen sich durch Spiegelungen, also durch die Bilder von Q unter $A(Q)$, so anordnen, dass eine Fläche gefliert werden kann.

Zu dieser Kategorie von Billards gehören Rechtecke, gleichseitige Dreiecke und rechtwinklige Dreiecke mit einem spitzen Winkel von $\pi/4$ oder $\pi/6$. Für diese Billards können wir den Billard-Fluss als konstanten Fluss auf einem Torus betrachten. Wir können Richtungen θ eines Flusses auf einer gegebenen Translationsfläche (X, ω) definieren. Wir betrachten dabei den gerichteten Fluss F_θ , welcher $X \times \mathbb{R}^+$ auf X abbildet, indem ein Paar (x, t) auf x' abgebildet wird. x' ist dabei auf einer Geraden in Richtung θ die Länge t von x entfernt.

Für integrierbare Polygone kann die Ausweitung der Billard-Trajektorien durch eine Ecke betrachtet werden, da die Winkel um die Eckpunkte 2π sind und die Trajektorien auf dem Torus unendlich weiterlaufen können.

Definition 1.5 (Nahezu integrierbare Polygone). Ein rationales Polygon Q wird als nahezu integrierbar bezeichnet, wenn $A(Q)$ eine diskrete Untergruppe der Bewegungen auf der Fläche ist.

Lemma 1.6 $A(Q)$ muss eine der Möglichkeiten von Definition 1.5 sein.

Nahezu integrierbare Polygone können auf korrespondierenden Gittern gezeichnet werden, die wir beim Fliesen der Ebene mit dem entsprechenden integrierbaren Polygon erhalten.

Lemma 1.7 Für nahezu integrierbare Billards sind die folgenden Aspekte äquivalent:

- (i) θ ist eine irrationale Steigung
- (ii) Die Orbits unter F_θ sind dicht
- (iii) F_θ ist ergodisch
- (iv) F_θ ist nicht periodisch: $F_\theta^t \neq id \forall t \neq 0$

[MT02, S. 1022]

1.1.2 Translationsflächen

Wir kennen bereits Beispiele für Translationsflächen: die Entfaltung von Billards. Dieser Abschnitt wurde mithilfe von [MT02, S. 1022] verfasst.

Definition 1.8 (Translationsfläche). Um Translationsflächen zu bilden, werden Polygone benötigt. An diesen werden Kantenverklebungen durchgeführt, wobei nur parallele, gleichlang Seiten verklebt werden können. Dabei ist darauf zu achten, dass die entstehende Fläche orientierbar ist. Diese Fläche ist die Translationsfläche, welche im Folgenden mit (X, ω) bezeichnet wird.

Beispiel 1.9 Durch die Spiegelung und Verklebung von Polygonen entstehen Translationsflächen. Dabei werden jeweils eine Seite s_i des Polygons mit der entsprechenden Seite s'_i nach der Spiegelung identifiziert. Diese Seiten werden dann miteinander verklebt, zu beachten ist dabei, dass diejenigen Seiten verklebt werden, über deren Spiegelachse gespiegelt wurde.

Beispiel 1.10 Gegeben sei ein reguläres, rationales n -Eck Q und ein $N \in \mathbb{Z}$, dann erzeugen Spiegelungen an Geraden, die durch den Ursprung und Ecken des Polygons verlaufen, die Gruppe $G(Q)$, welche der Diedergruppe D_N entspricht. Diese Gruppe hat die Kardinalität $2N$ und auf der Kreisbahn eines allgemeinen Punkts $\theta \neq k\pi/N, k \in \mathbb{Z}$ auf dem Einheitskreis liegen $2N$ Punkte.

Betrachtet wird nun ein Polygon Q mit Winkeln $\pi m_i/n_i$, wobei m_i und n_i teilerfremde ganze Zahlen sind. Das Einheits-Tangentialbündel $Q \times S^1$ stellt den Phasenraum des Billard-Flusses dar. Für diesen Fluss ist die Richtung nicht festgelegt, da sich dieser durch die Spiegelungen an den Kanten von Q immer wieder ändert. Wir können eine Teilmenge des Phasenraums betrachten, die wir, für ein festes θ , mit M_θ bezeichnen.

$$M_\theta = \{(q, \varphi) : q \in Q, \varphi \in D_N \cdot \theta\} = Q \times \{\theta_1\} \cup Q \times \{\theta_2\} \cup \dots$$

Diese Teilmenge des Phasenraums bildet dann die Translationsfläche M_θ , indem wir nach der Entfaltung die Seiten nach Vorschrift der Diedergruppe verkleben. Wir können nun $2N$ disjunkte und parallele Kopien von Q in der Ebene betrachten und diese mit Q_1, Q_2, \dots, Q_{2N} benennen. Wir orientieren die geradzahligen dabei im Uhrzeigersinn und die ungeradzahligen dagegen. Wählen wir ein $i \in \{1, \dots, 2N\}$ und eine Seite s von Q , so spiegeln wir die Richtung θ_i in dieser Seite. Es ergeben sich dadurch Richtungen θ_j mit $j \in \{1, \dots, 2N\}$. Nach Verkleben von der Seite s von Q_i mit der identischen Seite s von Q_j für alle $i \in \{1, \dots, 2N\}$ und alle Seiten s von Q sind alle Seiten der Polygone paarweise verklebt und die Verklebungen stimmen mit der Orientierung der Polygone überein. Dadurch erhalten wir eine orientierte kompakte Translationsfläche, die nur von der Wahl von Q abhängig ist und nicht von θ . Diese Translationsfläche wird (X, ω) genannt. Die Billard-Flüsse F_θ auf der Translationsfläche werden durch Rotationen auseinander gewonnen.

Lemma 1.11 *Eine Translationsfläche kann immer trianguliert werden.*

Definition 1.12 (Singularität). Eine Singularität einer Translationsfläche ist ein Punkt, welcher nach der Verklebung der Seiten einen Winkel größer 2π um sich besitzt. [Ran13, S. 7, 10]

Lemma 1.13 Sei (X, ω) eine Translationsfläche. Diese besitze n Singularitäten mit Multiplizitäten k_i , $i \in [1, n]$. Die Multiplizität einer Singularität ist dabei die Vielfachheit von 2π , die der Winkel um diese Singularität groß ist. Dann gilt für das Geschlecht g der Translationsfläche: [Ran16, Proposition 1.14]

$$g = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_i - 1)$$

Beweis. Wir betrachten eine Triangulierung von X , die wir so wählen, dass alle Singularitäten der Translationsfläche auf Eckpunkten von Dreiecken liegen. Sei E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen. Die Winkelgrößen aller Dreiecke können auf zwei Arten summiert werden, was uns zu folgenden Formeln führt:

$$F \cdot \pi = \sum_{i=1}^n k_i \cdot 2\pi + (E - n) \cdot 2\pi$$

Mit $2K = 3F$ folgt zusammen mit der Eulerschen Polyederformel

$$2 - 2g = E - K + F = E - \frac{1}{2}F$$

Außerdem gilt, da $F = 1$:

$$\pi = \sum_{i=1}^n k_i \cdot 2\pi + (E - n) \cdot 2\pi$$

Division mit 2π führt zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sum_{i=1}^n k_i + (E - n) \\ -E + \frac{1}{2} &= \sum_{i=1}^n k_i - n \\ E - \frac{1}{2} &= - \sum_{i=1}^n (k_i - 1) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.14 Durch die Formel ist erkenntlich, dass der Torus die einzige Translationsfläche ist, welche so mit einer Translationsstruktur versehen werden kann, dass wir eine endliche Translationsfläche ohne Singularitäten erhalten.

Veech-Flächen

Der Abschnitt zu den Veech-Flächen wurde auf Grundlage von [HS06, S. 9–12] verfasst.

Die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ operiert auf dem Raum aller Translationsflächen. Eine Matrix aus $SL(2, \mathbb{R})$ wird dabei mit einem Polygon aus dem Raum der Translationsflächen multipliziert. Wir merken an, dass ein Element von $SO(2, \mathbb{R})$ auf einer Translationsfläche als stückweise Rotation agiert. Diese Gruppenaktion korrespondiert zu Multiplikationen von ω mit einer komplexen Zahl der Norm eins.

Definition 1.15 (Veech-Gruppe). Wir bezeichnen den Stabilisator von (X, ω) unter der Gruppenaktion von $SL(2, \mathbb{R})$ mit $SL(X, \omega)$. $SL(X, \omega)$ ist dabei die Veech-Gruppe der Translationsfläche. Da $SL(2, \mathbb{R})$ nicht treu auf der oberen Halbebene agiert, betrachten wir die projektive Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$, welche diese Voraussetzung erfüllt.

Beispiel 1.16 (Veech-Gruppe eines Torus) Die Translationsfläche, die durch die Verklebung der Kanten eines Quadrats entsteht, ist ein Torus. Es operiert die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ auf dem Raum der Translationsflächen. Die Elemente der Gruppe erhalten während der Operation Parallelität und die gleiche Länge paralleler Seiten. Sei A ein Element von $SL(2, \mathbb{R})$ und P ein Polygon aus dem Raum der Translationsflächen. Dann betrachten wir

$$A \cdot P = AP.$$

In der folgenden Abbildung sind die Wirkungen von Matrizen auf das Quadrat aufgezeigt. Damit eine Matrix im Stabilisator enthalten ist, muss die Verklebung der Kanten durch die Gruppenoperation beibehalten werden.

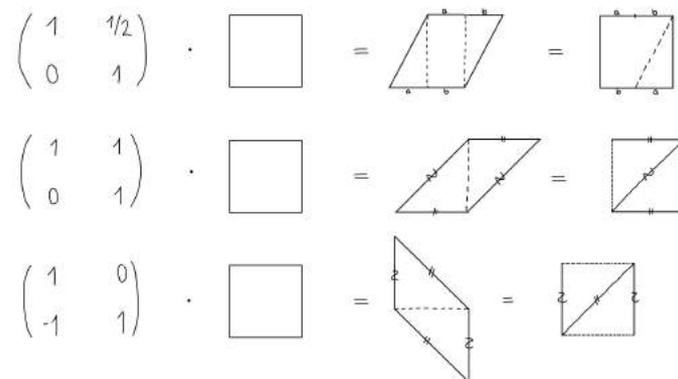


Abbildung 1.4. Operation der Matrizen aus der Gruppe des Stabilisators auf das Quadrat

Wir können erkennen, dass die erste Matrix kein Element des Stabilisators sein kann, da a nach der Gruppenoperation nicht mehr mit a verklebt werden würde.

Also sind nur die unteren beiden Matrizen Elemente des Stabilisators. Folglich ist $SL(2, \mathbb{Z})$ eine Untergruppe des Stabilisators, da die unteren beiden Matrizen Erzeuger von $SL(2, \mathbb{Z})$ sind. Wir möchten die Gleichheit der beiden Gruppen zeigen, da diese der Veech-Gruppe entsprechen würde. Ein Quadrat mit Verklebungen und somit ein Torus entspricht $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Da \mathbb{Z}^2 geometrisch ein Gitter in \mathbb{R}^2 definiert, können wir die Punkte des Gitters betrachten und bezeichnen diese als Gitterpunkte.

Für Matrizen $A \in Stab : A \cdot \{Gitterpunkte\} = \{Gitterpunkte\} \Rightarrow A \cdot \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2$. Somit gilt, dass $Stab$ eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{Z})$ ist und damit gilt die Gleichheit und wir haben gezeigt, dass dies die Veech-Gruppe des Torus ist.

Veech-Dichotomie

Wir bezeichnen F_θ als periodisch, wenn die Fläche in eine endliche Anzahl von Zylindern in Richtung θ zerlegt werden kann. Wir erinnern uns, dass die Veech-Gruppe von (X, ω) so definiert wurde, dass sie auf der hyperbolischen Ebene operiert.

Definition 1.17. Wir bezeichnen eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ als Gitter, wenn der Faktorraum unter der Gruppenaktion eine endliche (induzierte) hyperbolische Fläche hat.

Definition 1.18 (Veech-Fläche). Eine Translationsfläche heißt Veech-Fläche, wenn ihre Veech-Gruppe ein Gitter ist. Für solche wissen wir, dass der Fundamentalbereich in der oberen Halbebene einen endlichen Flächeninhalt hat.

Definition 1.19 (Eindeutig ergodisch). Wir nennen ein dynamisches System eindeutig ergodisch, wenn es ein eindeutiges, normiertes Borel-Maß besitzt, unter dem das System invariant ist. [Oxt52, S. 123]

Lemma 1.20 *Diese Definition von eindeutiger Ergodizität ist dazu äquivalent, dass jede invariante Menge (oder ihr Komplement) eine Nullmenge ist. Folglich ist die Menge nicht zerlegbar. [Oxt52, S. 123]*

Satz 1.21 (Veech-Dichotomie) *Sei (X, ω) eine Veech-Fläche. Dann gilt für jede Richtung θ , dass der Fluss F_θ entweder periodisch oder eindeutig ergodisch ist. [HS06, Theorem 1], [Vee89, Theorem 1.5]*

Beweis. Wir möchten die Veech-Dichotomie nur für einen speziellen Fall beweisen: den geodätischen Fluss F_θ mit festem θ auf einem Torus. Hierfür zeigen wir, dass für diese Betrachtung die Irrationalität von θ zur eindeutigen Ergodizität und die Rationalität zu Periodizität führt.

Sei θ irrational: $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Um die eindeutige Ergodizität zu zeigen, verwenden wir [EW10, Example 4.11]: Hier wird die Kreisrotation $R_\alpha : T \rightarrow T, x \mapsto x + \alpha \bmod \mathbb{Z}$ betrachtet, welche genau dann eindeutig ergodisch ist, falls α irrational ist. R_α entspricht der Wiederkehr-Abbildung von F_θ auf eine „Kante“ für ein entsprechendes α .

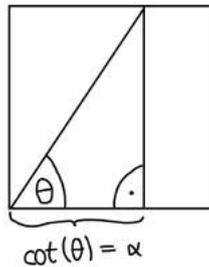


Abbildung 1.5. Zusammenhang zwischen α und θ

Das eindeutige, normierte Maß ist in diesem Fall das Lebesgue-Maß m_T . Wir nutzen im Folgenden eine spezielle Funktion f . Da α irrational ist, wissen wir, dass die Gleichung $\exp(2\pi i k \alpha) = 1$ nur dann gilt, falls $k = 0$ ist. Falls $f(t) = \exp(2\pi i k t)$ für gewisse $k \in \mathbb{Z}$ gilt, können wir sagen:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(R_\alpha^n t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi i k (t + n\alpha)) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ \frac{1}{N} \exp(2\pi i k t) \frac{\exp(2\pi i N k \alpha) - 1}{\exp(2\pi i k \alpha) - 1} & k \neq 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(R_\alpha^n t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int f \, dm_T = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

Wir möchten zeigen, warum das Integral für $k \neq 0$ gleich 0 ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int f(t) \, dm_T &= \int f(t) \, dt = \int_0^1 \exp(2\pi i k t) \, dt \\ &= 2\pi i k \exp(2\pi i k) - 2\pi i k \exp(0) = 2\pi i k - 2\pi i k = 0, \end{aligned}$$

dies folgt, da k eine ganze Zahl und mit Hilfe des Fundamentalsatzes.

Da Integrale linear auseinander gezogen werden können, kann auch für alle anderen trigonometrischen Polynome gezeigt werden, dass sie diese Gleichungen erfüllen. Trigonometrische Polynome sind Ausdrücke der Form

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \exp(ikx)$$

Auf solche Funktionen kann [EW10, Theorem 4.10] angewendet werden. Wir wissen bereits, dass

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(R_\alpha^n t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int f \, dm_T$$

gilt. Sei dieser Limes eine Konstante C_f , die von x unabhängig ist. Wir können dann sagen, dass $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(R_\alpha^n t)$ das Gleiche ist wie C_f und für zwei normierte, R_α -invariante Maße ν und μ die Gleichung

$$\int_X f \, d\nu = C_f = \int_X f \, d\mu$$

zeigen. Die Gleichheit gilt aufgrund der Rechnungen zuvor und da die Maße normiert sind. Da die trigonometrischen Polynome dicht sind, reicht es aus, die Aussage für diese zu überprüfen. Weil somit auch für $x \mapsto x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}}$ gezeigt ist, dass diese Funktion eindeutig ergodisch ist, können wir sagen, dass F_θ auf einer Kante des Torus eindeutig ergodisch ist und da sich dieses Argument auch für die anderen Kanten des Torus zeigen lässt gilt es für den Rand des Torus. Damit kann gezeigt werden, dass F_θ auf dem ganzen Torus eindeutig ergodisch ist.

Sei θ rational, dann können wir annehmen, dass $\theta = n/m$ ist. Wir können die Trajektorie durch den Vektor (n, m) repräsentieren, dabei nehmen wir an, dass sie in (x_0, y_0) startet. Sei dieser Startpunkt der Verzweigungspunkt des Torus. Aufgrund der Rationalität von n/m wird nach einer endlichen Anzahl an Wiederholungen beide Koordinaten um eine ganze Zahl erhöht werden. Ein Punkt mit zwei ganzzahligen Koordinaten entspricht auf dem Torus dem Verzweigungspunkt und somit ist die Trajektorie an den Anfangspunkt zurückgekehrt und damit periodisch, da die Richtung beibehalten wird. \square

Bemerkung 1.22 Aus [EW10, Theorem 4.10] und [EW10, Example 4.11] folgt, dass der Orbit $x, R_\alpha x, R_\alpha^2 x, \dots$ der Kreisrotation für jede irrationale Zahl α und jeden Anfangspunkt $x \in T$ gleichverteilt ist.

1.2 Minimalität von Flüssen und Definition metrischer Zylinder

In diesem Abschnitt wird zunächst darauf eingegangen, was ein minimaler Fluss ist. Anschließend werden Zylinder von Translationsflächen betrachtet. Dieses Kapitel wurde sinngemäß mit [MT02, S. 1024–1026] verfasst.

Definition 1.23. Ein Fluss F wird minimal genannt, falls jeder seiner Orbits im Phasenraum dicht ist. Der Orbit eines Flusses beschreibt alle möglichen Zustände, die nach der Gruppenoperation eingenommen werden können:

$$\mathbb{R} \cdot X = \{F_t(X) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Der Phasenraum beschreibt dabei alle möglichen Zustände, die vom dynamischen System eingenommen werden können. Jeder Punkt im Phasenraum steht für einen bestimmten Zustand des Systems. [Ros]

In diesem Fall entspricht der Phasenraum der Translationsfläche des Polygons.

Definition 1.24. Eine gerichtete Sattelverbindung in Richtung θ ist ein Orbit von F_θ , der von einer Singularität zu einer anderen geht (sie kann auch von einer Singularität erneut zu dieser gehen). Eine gerichtete Sattelverbindung hat keine inneren Singularitäten.

Eine Sattelverbindung wird im Euklidischen durch eine Geodätische repräsentiert, sie entspricht einem Holonomievektor in \mathbb{R}^2 . Wir können für eine Sattelverbindung β auch einen horizontalen und vertikalen Teil h_β und v_β des Vektors definieren.

Lemma 1.25 *Sei α^+ eine (in positive Richtung unendliche) Trajektorie mit Startpunkt P_0 . Sei β periodisch und im Lot zu α^+ und sei P_0 ein Punkt von β . Dann kehrt α^+ zu β zurück. [MT02, Lemma 1.7]*

Beweis. Da es in Richtung α^+ nur eine endliche Anzahl an Singularitäten gibt, kann es auch nur endlich viele Trajektorien geben, die in Punkten von β starten und eine Singularität durchlaufen, bevor sie wieder β kreuzen. Verkürzen wir β auf ein Teilintervall β' mit den Endpunkten P_0 und Q_0 , so können wir annehmen, dass es keine Trajektorie gibt, welche β' verlässt, durch eine Singularität verläuft bevor sie β kreuzt. Wir nehmen an, dass das Intervall β' in positiver Richtung verläuft.

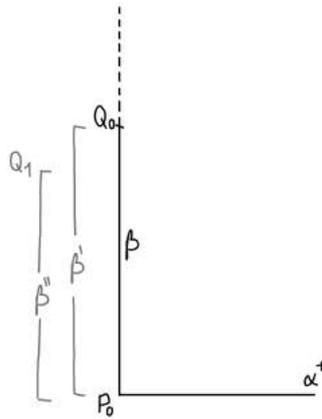


Abbildung 1.6. Skizze zur Veranschaulichung der Intervalle

Da β eine Fläche überstreicht, entsteht ein Rechteck, dass überstrichen wird. Das Überstreichen der Fläche ist in der folgenden Abbildung skizziert.

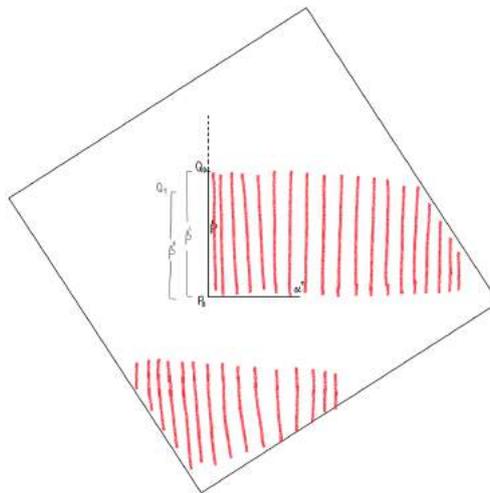


Abbildung 1.7. Skizze zur Veranschaulichung des Überstreichens der Fläche

Weil die Größe der Fläche endlich ist, muss das Intervall β' zurückkehren und mit β überlappen. Wenn α^+ dies tut, sind wir an dieser Stelle fertig. Andernfalls kehrt die Trajektorie, welche Q_0 verlässt, zu β' zurück. Sei Q_1 der Schnittpunkt der oberen Kante des überstreichenden Rechtecks mit β . Dann kehrt auch eine Trajektorie, die in $Q_1 \in \beta'$ startet, nach P_0 zurück. Betrachten wir nun ein Intervall $\beta'' \subset \beta'$ mit Endpunkten P_0 und Q_1 und wenden die zuvor durchgeführten Schritte darauf an. Der positiven Richtung folgend muss β'' zu β zurückkehren und dadurch muss auch α^+ selbst zu β zurückkehren. \square

Satz 1.26 *Sei (X, ω) eine Translationsfläche. Der Fluss F_θ ist für alle, außer abzählbar viele, Richtungen θ minimal auf der Translationsfläche. [MT02, Theorem 1.8]*

Beweis. In Richtung θ gibt es nur abzählbar viele Bögen, daher gibt es nur abzählbar viele Richtungen mit Sattelverbindungen. Dass in der Richtung θ keine Sattelverbindung liegt, bedeutet, dass der Fluss F_θ in dieser Richtung minimal ist. Mit Lemma 1.30 folgt, dass dort kein metrischer Zylinder liegen kann, da dort ansonsten eine Sattelverbindung liegen müsste. Angenommen in Richtung θ liegt eine unendliche Trajektorie l_θ , die nicht dicht ist. Sei $A \neq (X, \omega)$ die Menge der Häufungspunkte von l_θ . Dann ist A invariant unter dem Fluss F_θ . Da $A \neq (X, \omega)$ ist, können wir eine Trajektorie γ auf dem Rand von A wählen. Sei P_0 der Anfangspunkt der Trajektorie. Wir wollen zeigen, dass γ eine Sattelverbindung ist. Dafür nehmen wir an, dass γ keine Sattelverbindung ist, dann ist γ mindestens in eine der beiden Richtungen unendlich. Wir zeigen, dass es eine offene Umgebung von P_0 gibt, welche in A enthalten ist. Dies stellt einen Widerspruch da zu der Aussage, dass P_0 ein Randpunkt ist. Sei β ein geodätisches Segment im Lot zu γ , das P_0 als einen Endpunkt enthält. Es genügt nun zu zeigen, dass ein Intervall $[P_0, Q]$ existiert, das in A enthalten ist. Wenn wir dies auf beiden Seiten machen, erhalten wir die gesuchte offene Umgebung. Mit Lemma 1.25 folgt, dass γ an einem Punkt P_1 wieder auf β trifft. Wenn das Intervall $[P_0, P_1]$ eine Teilmenge von A ist, sind wir an dieser Stelle fertig. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert ein $Q_1 \in [P_0, P_1]$, das nicht in A enthalten ist. Da A eine abgeschlossene Menge ist, gibt es ein größtes Teilintervall $I_1 \subseteq [P_0, P_1]$, das Q_1 enthält und im Komplement von A enthalten ist. Sei P_2 der Endpunkt von I_1 , der am nächsten an P_0 liegt. Dann ist P_2 ein Element von A und die Trajektorie durch P_2 muss eine Sattelverbindung sein. Da wir, wenn wir mit γ in einer Richtung ins Unendliche gehen, I_1 kreuzen würden. Da A invariant unter dem Fluss ist, widerspricht dies aber der Aussage, dass I_1 im Komplement von A liegt. \square

Für die rationalen Billards bedeutet dies, dass für alle außer abzählbar viele Richtungen jede Billard-Trajektorie dicht in Q ist. Nähern wir ein allgemeines Billard durch ein rationales an, erhalten wir die folgenden Resultate für topologische Transitivität polygonaler Billards.

Definition 1.27. Ein Fluss heißt topologisch transitiv, falls er einen dichten Orbit besitzt.

Satz 1.28 *Für jedes $k > 2$ gibt es eine G_δ dichte Teilmenge in dem Raum einfach zusammenhängender Polygone mit k Ecken, welche aus Polygonen mit topologisch transitiven Billard-Flüssen besteht. [MT02, Theorem 1.10]*

Definition 1.29. Ein metrischer Zylinder in Richtung θ ist das isometrische Bild eines offenen, euklidischen Zylinders aus geschlossenen Geodätischen in Richtung von θ .

Ein metrischer Zylinder ist maximal, wenn er nicht vergrößerbar ist.

Lemma 1.30 *Wenn eine Translationsfläche (X, ω) Singularitäten besitzt, besteht der Rand eines maximalen metrischen Zylinders aus einer endlichen Anzahl an Sattelverbindungen in Richtung von θ . [MT02, Lemma 1.6]*

Beweis. Wenn ein metrischer Zylinder die ganze Fläche füllt, folgt dass (X, ω) ein flacher Torus ist, welcher keine Singularitäten besitzt. Der Grund, warum maximale Zylinder nicht vergrößert werden können, (wenn sie nicht die ganze Fläche füllen) sind Singularitäten auf dem Rand. \square

1.3 Illuminationsproblem

In diesem Kapitel werden rationale Polygone als Billards betrachtet. Zunächst werden weitere Begriffe definiert, im Anschluss wird im Speziellen auf rechtwinklige Dreiecke eingegangen. Für eine Vereinigung von gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken wird dann ein Beispiel für einen nicht vollständig illuminierbaren Raum aufgezeigt. In solchen Dreiecken gilt, dass es keine Billard-Trajektorie geben kann, die in einem Punkt A des Dreiecks beginnt und wieder nach A zurückkehrt. Abschließend wird ein Beweis geführt, in dem gezeigt wird, dass es auch in der Vereinigung allgemeinerer Dreiecke keine Billard-Trajektorie von A nach A geben kann.

Wir bezeichnen die rationalen Polygone mit Q . Die Translationsfläche von Q , welche durch Entfaltung des Polygons entsteht, wird mit (X, ω) bezeichnet. Dieser Abschnitt wurde auf Grundlage von [Tok95], [Ran17, S. 60] und [Wol19] verfasst.

Definition 1.31. Sei (X, ω) eine Translationsfläche. Zwei Punkte A und B in der Translationsfläche heißen endlich blockiert, wenn es eine endliche Teilmenge von (X, ω) gibt, welche mit jeder Trajektorie zwischen A und B gemeinsame Punkte hat.

Die Menge dieser Punkte nennen wir blockierende Menge. Die Punkte A und B dürfen nicht in dieser Teilmenge von (X, ω) enthalten sein.

Definition 1.32. Die minimale Kardinalität der blockierenden Menge von A und B wird bezeichnet als

$$BC(A, B).$$

Bemerkung 1.33 Per Definition bedeutet $BC(A, B) = 0$, dass es keine Billard-Trajektorie zwischen diesen beiden Punkten gibt.

Überlagerungstheorie

Wir wollen nun einen Exkurs zur Überlagerungstheorie geben, um im Folgenden Origamis definieren zu können. Dieser Abschnitt wurde mit Hilfe von [Soe23, S. 88–90, 98] verfasst.

Definition 1.34. Seien \tilde{U} und U topologische Räume. Eine stetige Abbildung

$$p : \tilde{U} \rightarrow U$$

ist eine triviale Überlagerung unter der Voraussetzung, dass $U \neq \emptyset$ ist. Außerdem muss ein diskreter Raum F mit einem Homöomorphismus $\varphi : F \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$ existieren, sodass das folgende Diagramm kommutiert. Der Homöomorphismus wird Trivialisierung der trivialen Überlagerung genannt. pr_2 ist dabei die Projektion auf die zweite Komponente.

$$\begin{array}{ccc}
 F \times U & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \tilde{U} \\
 \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow p \\
 U & \xlongequal{\quad} & U
 \end{array}$$

Abbildung 1.8. kommutierendes Diagramm, *Abbildung aus [Soe23]*

Definition 1.35. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass die induzierte Abbildung $p : p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine triviale Überlagerung ist, dann nennt man p Überlagerungsabbildung oder Überlagerung. U wird dann als trivial überlagerte Umgebung von x bezeichnet.

Eine Überlagerung des Torus wird in Abbildung 1.9 dargestellt. Dabei ist der „Eckpunkt“ des Quadrats ein Verzweigungspunkt.

Definition 1.36 (Verzweigte Überlagerung). Eine verzweigte Überlagerung erfüllt Definition 1.35 für alle Punkte, außer für die Verzweigungspunkte.

Bemerkung 1.37 Eine Überlagerung muss nicht surjektiv sein.

Als Faser von p im Punkt y wird die Menge aller Punkte bezeichnet, die von p auf den Punkt $y \in X$ abgebildet werden.

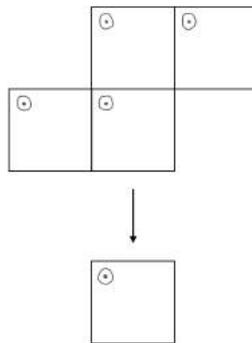


Abbildung 1.9. Verzweigte Überlagerung eines Torus

Definition 1.38. Gegeben seien zwei Überlagerungen $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $f : Y \rightarrow X$, die stetig sind. Ein Lift von f ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

1.3.1 Origamis

Wir können Zusammenhänge zwischen der minimalen Kardinalität der blockierenden Menge zweier Punkte auf Translationsflächen und deren Geometrie herstellen:

Lemma 1.39 *Eine Translationsfläche (X, ω) ist genau dann ein Origami, wenn alle Paare regulärer Punkte endlich blockiert sind.*

Dann existiert für jedes dieser Paare A, B ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $BC(A, B) \leq n$ ist. [Wol19, S. 2]

Definition 1.40 (Origami). Eine Translationsfläche (X, ω) wird Origami genannt, wenn eine der beiden Äquivalenzen (i) und (ii) gilt:

- (i) X kann als Verklebung von Quadraten dargestellt werden.
- (ii) X ist eine Translationsüberlagerung des einfach punktierten Torus.

Lemma 1.41 *Für ein gegebenes $x \in Q$ gibt es maximal endlich viele Punkte, welche sich nicht durch eine Billard-Trajektorie mit x verbinden lassen. [LMW16, Korollar 3]*

Lemma 1.42 *Gegeben sei ein Polygon Q . Dieses bezeichnen wir als Gauß oder Eisenstein, wenn es durch isometrische Dreiecke der Winkel $(\pi/4, \pi/4, \pi/2)$, beziehungsweise $(\pi/6, \pi/3, \pi/2)$ gefliest werden kann. Rechtecksgefliest bedeutet analog, dass es durch Rechtecke gefliest werden kann.*

- (i) *Wenn Q Gauß, Eisenstein, oder rechtecksgefliest ist, sind alle Punktepaare endlich blockiert.*
- (ii) *Wenn Q nicht Gauß, Eisenstein oder rechtecksgefliest ist und alle Winkel ganzzahlige Vielfache von $\pi/2$ sind, dann sind möglicherweise unendlich viele Punkte endlich blockiert, aber jeder Punkt ist nur mit endlich vielen anderen Punkten endlich blockiert.*
- (iii) *Andernfalls sind endlich viele Punktepaare endlich blockiert in Q .*

[AW21, Theorem 1.1]

Satz 1.43 *Sei Q ein rationales Polygon mit zusammenhängendem Inneren und bezeichne (X, ω) die Translationsfläche von Q . Dann gelten:*

- (i) *Nur endlich viele Punktepaare von Q können nicht durch eine Billard-Trajektorie miteinander verbunden werden.*
- (ii) *Die Menge $\{(A, B) \in Q^2 : BC(A, B) \leq n\}$ ist für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ endlich genau dann, wenn (X, ω) kein Origami ist.*

[Wol19, Theorem 1]

Bemerkung 1.44 Die Aussage (ii) wurde umgekehrt bereits in Lemma 1.39 getroffen.

1.3.2 Gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke

In diesem Abschnitt sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel in C gegeben.

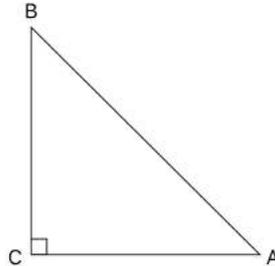


Abbildung 1.10. Gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel in C

Lemma 1.45 *Es existiert keine Billard-Trajektorie in dem Dreieck $\triangle ABC$ aus Abbildung 1.10, die in A beginnt und wieder zurück nach A verläuft. [Tok95, Lemma 3.1]*

Beweis. Durch Spiegelungen des Dreiecks $\triangle ABC$ erhalten wir ein Gitter in \mathbb{R}^2 , dieses ist in Abbildung 1.11 dargestellt. Dabei liegt ein Punkt A im Ursprung des Gitters und alle Ecken A haben ausschließlich gerade Koordinaten. Die Koordinaten der Eckpunkte B und C haben immer mindestens eine ungerade Komponente. Eine Billard-Trajektorie, welche von einem Punkt A zu einem anderen Punkt A verläuft, muss dann einen Punkt durchlaufen, welcher mindestens eine ungerade Koordinate hat, also eine Ecke B oder C . Beispielsweise muss die Billard-Trajektorie, die von $A(0,0)$ nach $A(2m,2n)$ verlaufen würde, durch den Punkt (m,n) verlaufen. In einer Ecke wird eine Trajektorie allerdings absorbiert, endet dort also. Somit kann es keine Billard-Trajektorie von A zu A geben. \square

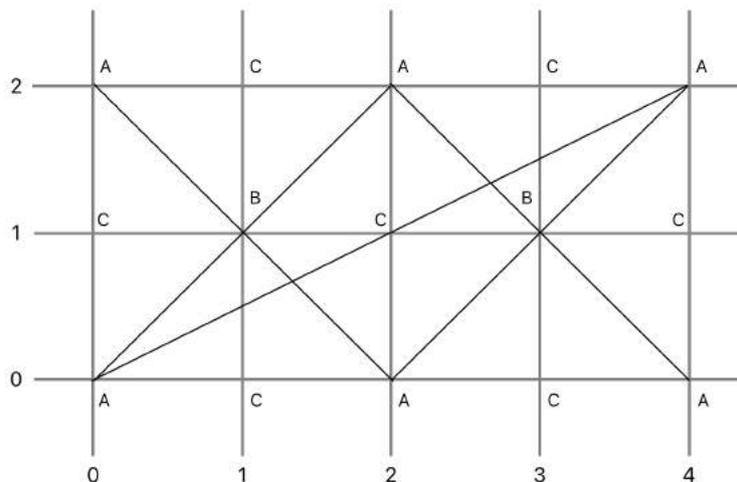


Abbildung 1.11. Gitter mit A im Ursprung

Lemma 1.46 *In Billards, welche aus Kopien des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammengesetzt sind und bei denen die Kopien der Punkte B und C weiterhin Eckpunkte des Polygons bleiben, können keine Billard-Trajektorien von A nach A existieren. [Tok95, S. 869–870]*

Beweis. Der Beweis folgt aus dem Beweis von Lemma 1.45, da sich eine Billard-Trajektorie in solch einem Polygon auf eine Billard-Trajektorie in dem Dreieck $\triangle ABC$ zurückführen lassen würde, welche nicht möglich ist. Diese Rückführung kann als Gegensatz zur Entfaltung von Polygonen veranschaulicht werden: sobald die Trajektorie auf die Kante zwischen zwei gespiegelten Dreiecken trifft, wird an dieser Kante zurückgespiegelt und so erhalten wir eine Billard-Trajektorie in dem gegebenen Dreieck. \square

Bemerkung 1.47 Die Punkte B und C müssen als Eckpunkte des Polygons erhalten bleiben, da der Beweis von Lemma 1.45 ansonsten nicht mehr funktionieren würde. In diesem wurde gezeigt, dass eine Billard-Trajektorie von A nach A nicht existieren kann, da diese durch Punkte B oder C verlaufen würde und dort dann absorbiert würde. Wenn B und C keine Eckpunkte mehr wären, würde diese Folgerung keinen Sinn mehr ergeben.

Es stellt sich die Frage, wie viele Ecken ein Polygon mindestens haben muss, so dass sich zwei Punkte im Inneren finden lassen, die wir nicht durch eine Billard-Trajektorie miteinander verbinden können. Die minimale Anzahl an Ecken, für welche es aktuell ein solches Beispiel gibt, beträgt 22. Dieses Polygon entstand ebenfalls durch Spiegelungen des Dreiecks $\triangle ABC$ und ist in Abbildung 1.12 dargestellt. [Wol19, S. 14–15]

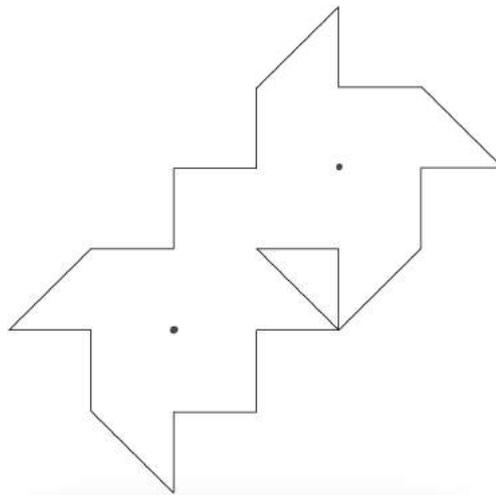


Abbildung 1.12. Polygon mit 22 Ecken, bei dem die beiden eingezeichneten Punkte A nicht durch eine Billard-Trajektorie miteinander verbunden werden können

Wir gehen der Frage nach, ob von den Kopien des Dreiecks $\triangle ABC$ in Abbildung 1.12 einzelne weggelassen werden können. Hierfür ist es wichtig zu beachten, dass die Ecken B und C des Dreiecks auch im Polygon Eckpunkte bleiben müssen. Es können also nur nach dieser Vorschrift Dreiecke entfernt werden. Wir können nach einzelner Betrachtung der Dreiecke des Polygons schnell feststellen, dass diese essentiell wichtig dafür sind, dass B und C als Eckpunkte erhalten bleiben und somit nicht entfernt werden können.

Überlegen wir uns also, wie viele Dreiecke für ein solches Polygon benötigt werden: Wir benötigen zwei Punkte A im Inneren, daher werden zweimal acht Dreiecke benötigt, um die beiden Quadrate zu erhalten. Diese dürfen sich nicht überlappen, da A und A ansonsten über eine direkte Gerade verbunden werden könnten. Da B und C Eckpunkte des Polygons bleiben müssen, werden für beide Quadrate jeweils weitere vier Dreiecke benötigt. Die Verbindung der beiden Quadrate kann allerdings nicht über ein einzelnes Dreieck erfolgen (in diesem Fall könnte man dann ein anderes der acht Dreiecke weglassen), da die Dreiecke aufgrund der Entfaltung immer mit einer Kathete an das Quadrat anschließen. Die Hypotenusen der Dreiecke liegen im Inneren der Quadrate. Würden wir jetzt an eines der angefügten äußeren Dreiecke das andere Quadrat anschließen, so könnte dies folglich auch nicht über die Hypotenuse passieren. Durch die Verbindung an der freien Kathete entstünde allerdings eine direkte Verbindung der beiden Quadrate, über die eine Billard-Trajektorie möglich wäre. Außerdem ist das zweite Quadrat dann nicht mehr so zusammengesetzt, dass A der Mittelpunkt ist und B und C Eckpunkte bleiben. Diese Situation wurde in der folgenden Abbildung zur Veranschaulichung an das Polygon angezeichnet.

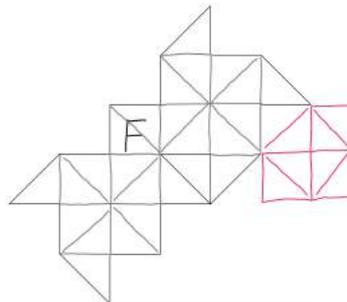


Abbildung 1.13. Skizzierung des Vorgangs

Somit kommt man insgesamt auf 24 Dreiecke, aus denen das Polygon minimal bestehen muss. Das Polygon in Abbildung 1.12 besteht aus 24 Dreiecken, es kann folglich keines davon weggelassen werden. Somit wurde gezeigt, dass unter der Anwendung von Lemma 1.46 dies die kleinst mögliche Anzahl an Dreiecken ist, um ein solches Polygon zu erzeugen.

1.3.3 Translationsfläche des Polygons aus Abbildung 1.12

Die gleichnamigen Seiten in Abbildung 1.14 werden miteinander verklebt. Das „F“, das in die Kopien des Polygons eingezeichnet wurde, dient zur Visualisierung der durchgeführten Spiegelungen.

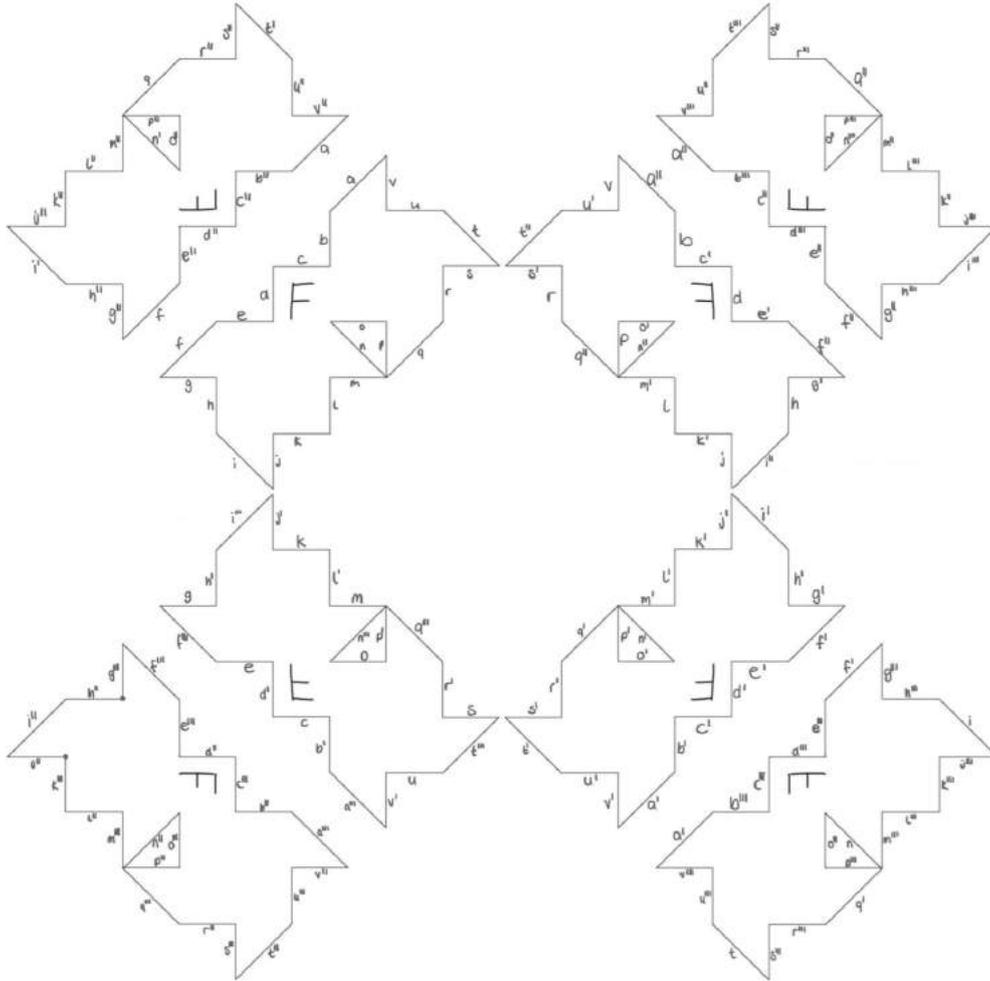


Abbildung 1.14. Translationsfläche des Polygons mit 22 Ecken (aus Abbildung 1.12)

Anhand der Abbildung 1.14 wird schnell deutlich, dass die Verklebung der gleichnamigen Seiten zu einem Origami führt, da die Polygone in der Abbildung bereits aus Quadraten und rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt sind. Die gleichschenkligen Dreiecke ergänzen sich dann bei der Verklebung zu Quadraten. Ausgehend davon stellt sich die Frage, welche Art von Billard-Tischen immer zu Origamis führt.

Lemma 1.48 *Rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke führen zu Origamis.*

Beweis. Wie bereits beschrieben und auch an der Translationsfläche in Abbildung 1.14 erkennbar, führen rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke nach der Spiegelung und Verklebung zu Quadraten. Da das Polygon jeweils an den unterschiedlichen Seiten gespiegelt wird, entstehen durch die Spiegelungen parallele Seiten, welche miteinander verklebt werden. Da rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke nur Winkel der Größen $\pi/2$ und $\pi/4$ besitzen, führen die Verklebungen der parallelen Seiten zu Quadraten. Die entstehende Fläche ist also von Quadraten gefliest und daher ein Origami. \square

Bemerkung 1.49 Für diese Klasse von Dreiecken können wir dann auch die Definitionen und Lemmata über endliche Blockiertheit und das Illuminationsproblem anwenden und außerdem die Eigenschaften, die wir für den Torus bewiesen haben, aufgrund der Überlagerung übernehmen.

Satz 1.50 *Alle Origamis sind Veech-Flächen.*

Beweis. Nach Definition ist das Origami (X, ω) eine Translationsüberlagerung des einfach punktierten Torus. Nach [GJ00, Theorem 5.5] gilt, dass dies äquivalent dazu ist, dass die Veech-Gruppe $SL(X, \omega)$ kommensurabel zu $SL(2, \mathbb{Z})$ ist. Das heißt, es gibt eine gemeinsame Untergruppe, die wir mit Γ bezeichnen, diese hat in beiden Gruppen endlichen Index. Wir sagen: $[SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] = n$ und $[SL(X, \omega) : \Gamma] = m$. Dann können wir folgende Formeln für die Flächeninhalte der Fundamentalbereiche (F) aufstellen:

$$\text{area}(F_\Gamma) = n \cdot \text{area}(F_{SL(2, \mathbb{Z})})$$

und

$$\text{area}(F_\Gamma) = m \cdot \text{area}(F_{SL(X, \omega)})$$

Da der Fundamentalbereich von $SL(2, \mathbb{Z})$ endlichen Flächeninhalt hat, hat dann auch der Fundamentalbereich von $SL(X, \omega)$ endlichen Flächeninhalt und damit ist die Translationsfläche (X, ω) eine Veech-Fläche. \square

Lemma 1.51 *Für das Polygon aus Abbildung 1.14 gilt, dass jede Billard-Trajektorie in beliebige Richtung θ entweder periodisch oder eindeutig ergodisch ist.*

Beweis. Dies folgt mit Satz 1.21, da die Translationsfläche in Abbildung 1.14 ein Origami bildet und daher eine Veech-Fläche darstellt.

Beispiel 1.52 Wir möchten das Geschlecht der Translationsfläche aus Abbildung 1.14 bestimmen. Dafür verwenden wir die Formel aus Lemma 1.13. Für die Berechnung des Geschlechts müssen die Multiplizitäten der Singularitäten bestimmt werden. In der folgenden Abbildung wurden diese farblich markiert.

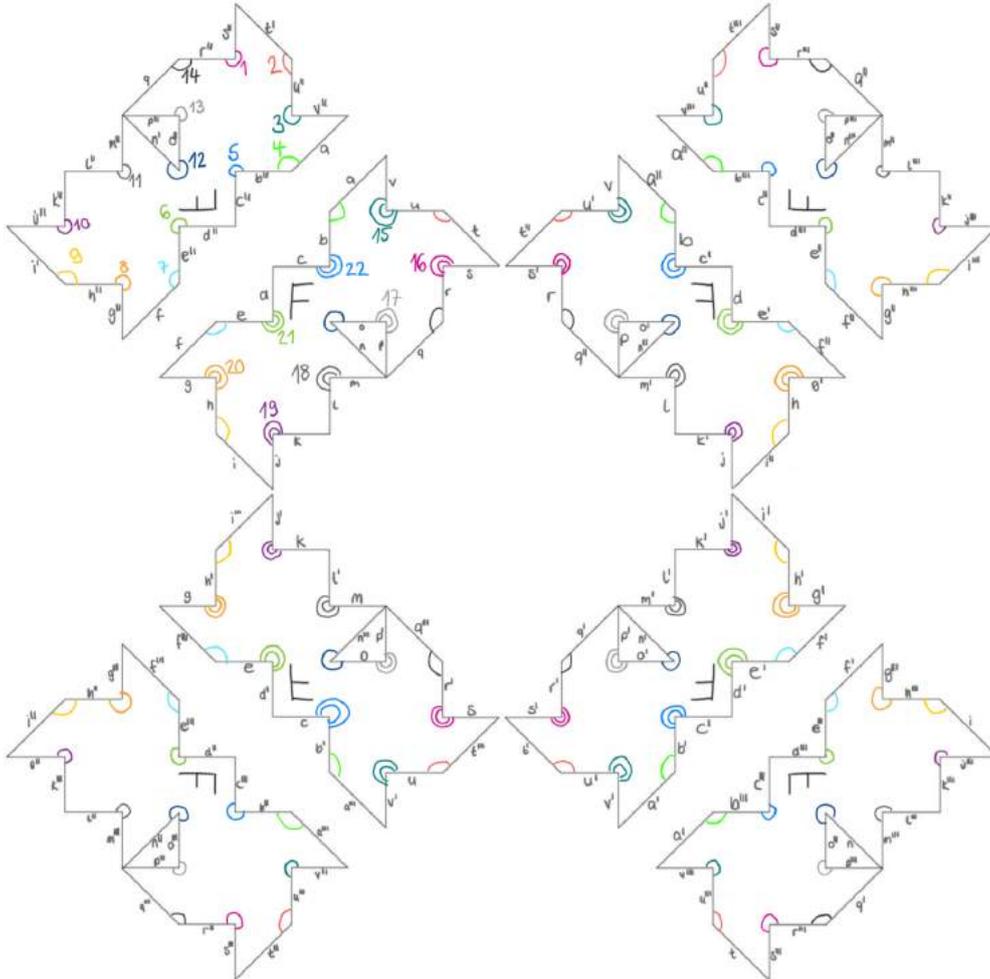


Abbildung 1.15. Singularitäten des Polygons mit 22 Ecken

Die Innenwinkelgrößen des Polygons betragen $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, $3\pi/2$ und $7\pi/4$. Anhand der eingezeichneten Singularitäten können drei Typen festgestellt werden: Singularitäten mit Ausgangswinkel $3\pi/4$, $3\pi/2$ oder $7\pi/4$. Wir erhalten 21 Singularitäten mit Multiplizität 3 und eine Singularität mit Multiplizität 7. Die restlichen Eckpunkte des Polygons sind hebbare Singularitäten, sie haben alle einen Winkel von 2π um sich. Betrachten wir alle Singularitäten des Polygons, müssen wir auch die hebbaren Singularitäten inklusive der beiden inneren Punkte mitzählen. Wir erhalten dann 48 Singularitäten.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 g &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_i - 1) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left(21 \cdot (3 - 1) + (7 - 1) \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 48 \\
 &= 25
 \end{aligned}$$

Das Geschlecht der Translationsfläche ist also 25.

Veech-Gruppe des Polygons aus Abbildung 1.12

Der Abschnitt wurde mithilfe von [Ran13, S. 7, 10] und [Ran16, S. 39] verfasst. Die Quelle zur Beschreibung der Hauptkongruenzgruppe ist [Sem].

Wir wollen im Folgenden die Veech-Gruppe von (X, ω) bestimmen. Wir wissen, dass es eine verzweigte Überlagerung von (X, ω) nach T gibt, wobei T ein Torus ist. Diese Überlagerung bezeichnen wir mit π . Sei P der Verzweigungspunkt des Torus. Dann enthält $\pi^{-1}(P) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{48}\}$ alle Singularitäten. Sei $A \in SL(X, \omega)$, wobei $SL(X, \omega)$ die Veech-Gruppe von X bezeichnet. Wir gehen zunächst davon aus, dass $A(\pi^{-1}(P)) = \pi^{-1}(P)$. Dann ist $A \cdot \{P\} = \{P\} \Rightarrow A \in SL(T)$. Damit folgt, dass $SL(X, \omega)$ eine Teilmenge von $SL(T) = SL(2, \mathbb{Z})$ ist. Wir müssen also noch zeigen, dass die Gleichheit $A(\pi^{-1}(P)) = \pi^{-1}(P)$ gilt. Wir wissen, dass diese Gleichung für Singularitäten gilt, da diese wieder auf Gitterpunkte abgebildet werden. Bei Betrachtung der Translationsfläche können wir schnell erkennen, dass die hebbaren Singularitäten immer mit drei Singularitäten ein Quadrat bilden. Da die Gleichung für Singularitäten gilt und wir den Flächeninhalt beibehalten, muss auch die hebbare Singularität auf einen Gitterpunkt abgebildet werden. Somit ist die Gleichheit gezeigt.

Wir möchten im Folgenden überprüfen, welche Aussagen wir über scherende Matrizen in der Veech-Gruppe treffen können. Dafür betrachten wir die Zylinderzerlegung des Polygons.

Die Translationsfläche des Polygons können wir als Zerlegung in Zylinder darstellen. In den folgenden beiden Abbildungen sind die Zylinderzerlegungen des Polygons dargestellt.

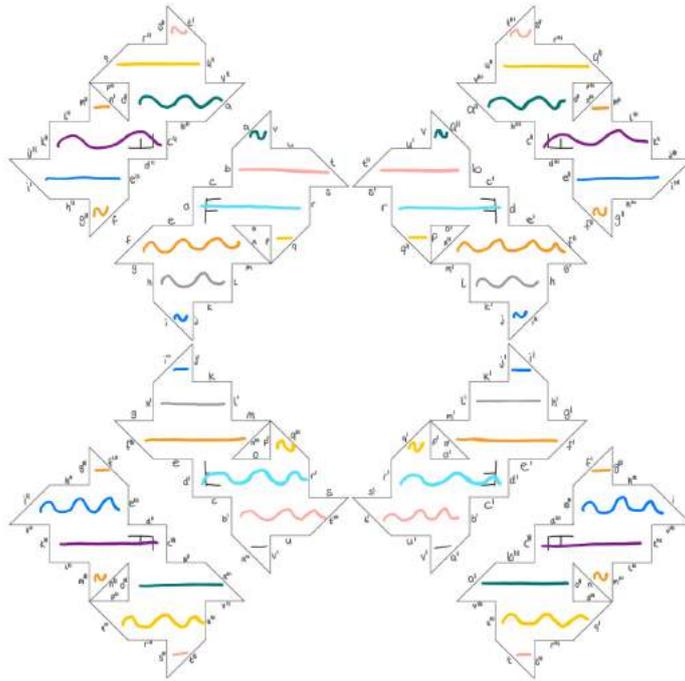


Abbildung 1.16. Horizontale Zylinderzerlegung

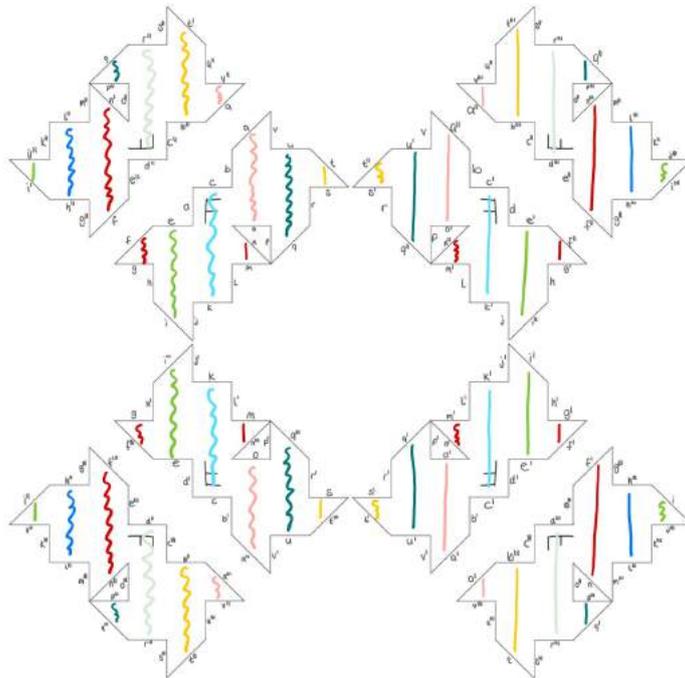


Abbildung 1.17. Vertikale Zylinderzerlegung

Für solche Zerlegungen kann Lemma 1.54 angewendet werden:

Definition 1.53 (Kommensurabel). Zwei Elemente a und $b \in \mathbb{R}$ heißen kommensurabel, wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$a = k_a \cdot m \text{ und } b = k_b \cdot m$$

für $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$.

Lemma 1.54 Sei (X, ω) eine Translationsfläche und (z_n) eine Zerlegung in Zylinder. Für einen Zylinder z_i aus der Zerlegung werden die Höhe h_i und der Umfang c_i definiert. Wenn die inversen Moduln $\frac{h_i}{c_i}$ kommensurabel sind, existiert ein $m \in \mathbb{R}$, sodass jeder inverse Modul ein ganzzahliges Vielfaches von m ist. Damit enthält die Veech-Gruppe der Translationsfläche ein Konjugiertes der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Matrix definiert eine horizontale Scherung. [Vee89]

Für vertikale Scherungen kann das Lemma analog verwendet werden, dabei wird eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/m & 1 \end{pmatrix}$ erhalten.

Beweis. Wir bezeichnen das kleinste gemeinsame Vielfache der Moduli mit m . Für die horizontale Zylinderzerlegung definieren wir dann die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch A wird hier auf jedem Zylinder ein (eventuell multipler) Twist durchgeführt, welcher die Zylinderränder fest lässt. Dieser Twist ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Abbildung 1.18. Twist eines parabolischen Elements auf Zylindern, in unserem Fall gilt $m = \alpha$ Abbildung aus [Ran17, S. 77]

Da die Ränder der Zylinder fest gelassen werden, können wir die Aktionen auf den einzelnen Zylindern zusammensetzen zu einer affinen Abbildung. Wir erhalten dadurch $A \in SL(X, \omega)$. Für den vertikalen Fall können wir eine Drehmatrix D betrachten, durch die die Richtung der Zylinderzerlegung auf die Horizontale abgebildet wird. Damit folgt, dass $A \in SL(X, D \cdot \omega)$ ist und somit gilt $D^{-1}AD \in SL(X, \omega)$. [Ran17, Proposition 5.3 (i)] □

Für unsere Translationsfläche gilt sowohl für den horizontalen als auch vertikalen Fall: $m = 1/24$, da alle Zylinder die Höhe 1 haben und die $c_i \in \{4, 6, 8\}$ sind. Daher wissen wir, dass die Veech-Gruppe mindestens dem Erzeugnis von $\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$ entsprechen muss.

Anhand der Abbildung 1.15 können wir bereits erkennen, dass die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, welche eine Punktspiegelung durchführt, in $SL(X, \omega)$ enthalten ist, da die Bilder dieser Spiegelung auch bereits in der Abbildung aufgeführt sind, man kann sich in der Mitte der Abbildung einen Punkt denken, durch den die Punktspiegelung durchgeführt wurde.

Daher können wir über die Veech-Gruppe des Polygons folgende Aussage treffen: die Veech-Gruppe $SL(X, \omega)$ entspricht mindestens dem Erzeugnis von $\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$ und maximal der Gruppe $SL(2, \mathbb{Z})$.

Da wir wissen, dass unsere Translationsfläche ein Origami ist, folgt mit Satz 1.50, dass die Translationsfläche eine Veech-Fläche ist.

1.3.4 Allgemeinere Dreiecke

Sei Q ein Dreieck $\triangle ABC$ und seien $\angle A = \pi/n$ und $\angle B = m\pi/n$. Dabei ist n gerade und $m \in \mathbb{N}$, außerdem gilt $m < n - 1$.

Lemma 1.55 *In Q existiert keine Billard-Trajektorie von A nach A . [Wol19, Lemma 3.1]*

Beweis. Der Beweis wird per Widerspruch geführt, es wird also angenommen, dass eine Billard-Trajektorie von A nach A existiert und diese wird mit $\alpha(t)$ bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass diese Trajektorie in A startet. Wir setzen also $\alpha(0) = A$ und sagen, dass dieser Punkt im Ursprung liegt. Sei $\text{Ref}(\theta)$ die Reflexion an einer Geraden durch den Ursprung, welche zusammen mit der x-Achse einen Winkel θ bildet. Außerdem sei die planare Rotation um diesen Winkel θ gegeben durch $\text{Rot}(\theta)$. Die Diedergruppe von Q kann aufgefasst werden als

$$\Gamma = \left\langle \text{Ref}\left(\frac{\pi}{n}\right), \text{Ref}(0) \right\rangle$$

Multiplizieren der korrespondierenden orthogonalen Matrizen führt uns zu

$$\text{Ref}\left(\frac{\pi}{n}\right)\text{Ref}(0) = \text{Rot}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \text{ und } \left(\text{Rot}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^{m-1} \text{Ref}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \text{Ref}\left(\frac{m\pi}{n}\right),$$

somit lässt sich die Diedergruppe auffassen als Symmetrische-Gruppe eines regulären n -Ecks:

$$\Gamma = \left\langle \text{Ref}\left(\frac{\pi}{n}\right), \text{Rot}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right\rangle \simeq D_n$$

Aus $2n$ Kopien von Q entsteht ein Polygon, abgebildet in Abbildung 1.19, welches um den Punkt A aufgefaltet ist. Dieses entstandene Polygon ist die Translationsfläche von Q .

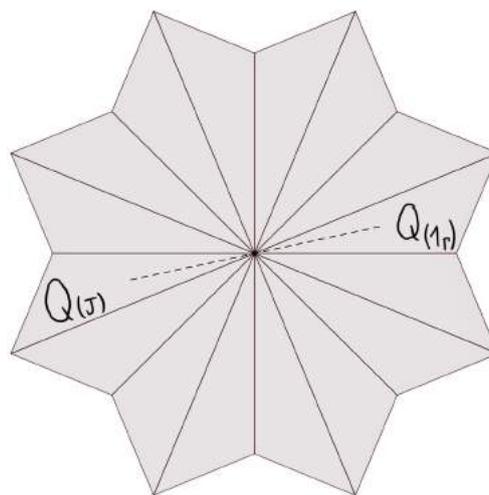


Abbildung 1.19. Translationsfläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit Winkeln $\pi/8$ und $5\pi/8$ und A im Ursprung, gestrichelt ist eine Geodätische eingezeichnet
Abbildung aus [Wol19, S. 17]

Die Ecke A bildet dabei eine hebbare Singularität.

Sei $\tilde{\alpha}(t)$ ein Lift von $\alpha(t)$ in die Kopie von Q , die zum neutralen Element gehört, so dass für genügend kleines ϵ jedes $t \in (0, \epsilon)$ ein $\alpha(t) \in Q_{(1_\Gamma)}$ besitzt. Diese Kopie des Dreiecks wird mit $Q_{(1_\Gamma)}$ bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ geht $\tilde{\alpha}(t)$ von $Q_{(1_\Gamma)}$ zu der um π rotierten Kopie von Q über. Die zugehörige Kopie des Dreiecks ist dabei $Q_{(\tau)}$ mit $\tau = (\text{Rot}(\frac{2\pi}{n}))^{n/2} \in \Gamma$. Für $t \in [0, \epsilon]$ erhalten wir $\tilde{\alpha}(t) = \tau\tilde{\alpha}(-t)$. Eine Ausweitung dieser Symmetrie führt zur Gültigkeit derselben Gleichung für alle $t \in [0, T]$, dabei ist T die kleinste Periodenlänge von $\tilde{\alpha}(t)$, für die eine geschlossene Geodätische auf der Translationsfläche existiert. Wir können jetzt feststellen, dass für die Mittelpunkte der Billard-Trajektorien sowohl $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2}) = \tilde{\alpha}(\frac{-T}{2})$ als auch $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2}) = \tau\tilde{\alpha}(\frac{-T}{2})$ gilt. Daher kann gefolgert werden, dass $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2})$ unter τ fixiert ist. Da Γ auf $\pi^{-1}(\text{int}(Q))$ agiert, kann $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2})$ nicht der Bildpunkt eines inneren Punktes sein, daher muss es der Lift eines Randpunktes sein. Aufgrund der Konstruktion ist jeder Lift eines Innenpunktes auf einen Eckpunkt von Q fixiert durch eine einzelne Spiegelung von Γ , daher muss $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2})$ eine Singularität sein. Dies steht allerdings im Widerspruch dazu, dass $\tilde{\alpha}(t)$ eine geschlossene Geodätische ist (wenn $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2}) \neq 0$) oder andernfalls dazu, dass T die minimale Periode ist (wenn $\tilde{\alpha}(\frac{T}{2}) = 0$).

Folglich kann es keine Billard-Trajektorie von A nach A geben. \square

Fachdidaktischer Teil

Bevor ich auf die Planung und den Aufbau meines Workshops eingehe, möchte ich zunächst einen Überblick über die Theorie des fachdidaktischen Teils geben. Dabei werde ich auf die Themen Problemlösen beim mathematischen Lernen, Weltbilder der Mathematik und digitale Medien beim mathematischen Lernen eingehen. Diese Themenbereiche wurden während der Durchführung des Workshops mit den Lernenden umgesetzt.

2.1 Theoretischer Hintergrund

2.1.1 Problemlösen beim mathematischen Lernen

Problemlöseaufgaben führen zu kognitiver Aktivierung und der Anregung von Diskussionen unter den Lernenden. Daher wurden die Aufgabenstellungen während der Forschungsphasen des Workshops sehr offen gehalten und die Lernenden konnten sich an der Simulation ausprobieren. Dieses Kapitel wurde mit [Hru18] verfasst. In der Mathematik spricht man beispielsweise von Problemen, wenn in einer Aufgabe das Ziel unbekannt ist. Die Lernenden haben dabei ihre Hilfsmittel gegeben und wissen, womit sie arbeiten können, aber das genaue Ziel, auf das sie hinarbeiten, ist nicht bekannt. Diese Art von Problemen nennt man dialektisch. Der Unterschied zu gängigen Aufgaben ist, dass diese häufig verlangen, Gelerntes zu reproduzieren. Beim Problemlösen müssen die Lernenden sich selbst durch Hypothesen Wege überlegen, wie sie ihr Ziel erreichen. Typische Beispiele für Problemlöseaufgaben sind solche, in denen etwas bewiesen oder widerlegt werden muss. Problemlöseaufgaben sind häufig offen und mehrdeutig. Um eine Lösung zu finden müssen Lernende neue Sichtweisen einnehmen, ihr bekanntes Wissen neu verknüpfen und kreativ denken, um Ideen zu entwerfen. Diese Art von Aufgaben führt bei den Lernenden auch zum Weiterdenken und Ausbauen des Themas. Problemlöseaufgaben benötigen häufig auch Kompetenzen zum eigenständigen Arbeiten, welche nach Pólya unter das praktische Können einer Person fallen. Das Wissen teilt sich dabei auf in die Kenntnis der Tatsachen und das praktische Können.

Problemlöseaufgaben sind für die Lernenden wichtig, da sie dadurch die Mathematik konstruieren können. Die eigenständige Arbeit an einem Problem führt zu

nachhaltigerem Lernen. Außerdem kann es beim Problemlösen zu emotionalen Momenten kommen, das Durchhaltevermögen und die allgemeine Haltung zu Problemen werden durch die Arbeit mit solchen Aufgaben verbessert. Zusätzlich üben die Lernenden, ihr Vorgehen zu reflektieren, darüber zu diskutieren und sie lernen, wie sie ihre Ergebnisse präsentieren können.

Das Vorgehen beim Lösen eines Problems kann in vier Phasen unterteilt werden: Verstehen des Problems, Ausdenken eines Plans, Ausführen eines Plans, Reflexion. In der zweiten Phase ist es wichtig, dass die Lehrenden die Lernenden nur soweit unterstützen, wie nötig. Im besten Fall führen dabei Hilfestellungen zum Aufrechterhalten der Motivation.

2.1.2 Weltbilder der Mathematik

Die Weltbilder der Mathematik spiegeln die unterschiedlichen Einstellungen der Lernenden gegenüber der Mathematik wider. Durch verschiedene Fragen, die den Lernenden gestellt wurden, sollte auch ausfindig gemacht werden, wie die Einstellung der Gruppe in Bezug auf Mathematik ist. Dieser Abschnitt wurde auf Grundlage von [Wey21] geschrieben.

Der Begriff der Beliefs taucht im Zusammenhang mit den Weltbildern der Mathematik häufig auf, daher wird an dieser Stelle auch auf diesen eingegangen. Als Beliefs werden Aussagen bezeichnet, die die Lernenden als wahr betrachten. Diese subjektive Meinung entsteht unabhängig von objektiven Beurteilungen. Für einzelne Personen können Beliefs auch in unterschiedlichen Abstufungen vorkommen. Die Entstehung von Beliefs ist ein Prozess über längere Zeit und der Aufbau passiert eher unbewusst. Im Gegensatz zum Wissen müssen sie nicht hinterfragt oder gerechtfertigt werden, außerdem werden diese Ansichten auch nicht unbedingt vollständig reflektiert. Man kann den Begriff in drei Kategorien unterteilen: die globalen, bereichsspezifischen und gegenstandsspezifischen Beliefs. Zur ersten Kategorie gehört beispielsweise die allgemeine Einstellung gegenüber der Mathematik. Die bereichsspezifischen Beliefs beziehen sich auf unterschiedliche Teilaspekte, beispielsweise können sie sich speziell auf Geometrie, Stochastik oder Analysis beschränken. Der dritte Bereich bezieht sich auf mathematische Objekte, beispielsweise Funktionen oder Zahlbereiche.

Der Bezug zwischen mathematischen Weltbildern und Beliefs ist vermutlich wechselseitig, in den unterschiedlichen Lernprozessen in der Schule kommt es mal zu top-down (die globalen Beliefs beeinflussen die gegenstandsspezifischen Beliefs) und in anderen Fällen zu bottom-up (gegenstandsspezifische Beliefs legen das mathematische Weltbild fest).

Man kann das subjektive Wissen über die Mathematik in unterschiedliche Bereiche aufteilen: die „Einstellungen über Mathematik, das Lernen von Mathematik, das Lehren von Mathematik und über sich selbst (oder andere) als Betreiber von Mathematik“ [Wey21]. Dabei kann man die Einstellungen über Mathematik noch in verschiedene Unterbereiche aufgliedern, diese beziehen sich dann beispielsweise nur auf das schulbezogene mathematische Lernen, oder auf mathematische Auf-

gaben und das Lösen von Problemen. Eine dritte Untergruppe legt den Fokus auf die Nützlichkeit und Anwendung des Gelernten.

2.1.3 Digitale Medien beim mathematischen Lernen

In diesem Abschnitt wird auf den Nutzen digitaler Medien in Bezug auf das Lernverhalten eingegangen. Während des Workshops haben die Lernenden an iPads gearbeitet, wodurch die Arbeit an einer Simulation ermöglicht wurde, die man ansonsten experimentell nicht hätte umsetzen können. Dieser Abschnitt wurde mit Hilfe von [Hil+17] verfasst.

Unter digitale Medien fallen alle elektronischen Geräte, welche den Lernenden einen Umgang mit digitalen Lernprogrammen ermöglichen. Beim Umgang mit digitalen Medien stellt sich die Frage, ob sie in der Schule nützlich sind und welche Vorteile sich für die Vermittlung von Wissen ergeben können. Der Durchschnitt verschiedener Studien zu diesem Thema ergab im Allgemeinen einen positiven Lerneffekt bei der Verwendung digitaler Medien für das Lernen. Die alleinige Verwendung der digitalen Medien unterstützt noch nicht in Lernprozessen, es müssen auch im Umgang die richtigen Methoden zur kognitiven Aktivierung gewählt werden. Es darf nicht die Nutzung der digitalen Medien im Zentrum stehen, sondern der Fachinhalt und der Lernerfolg auf Seiten der Lernenden. Bereits bekannt ist, dass der Großteil der Lernenden den größten Lernerfolg erzielen, wenn ihnen der Lernstoff auditiv und visuell angeboten wird. Reines Lesen oder Hören führt zu weniger positiven Ergebnissen. Durch die Nutzung digitaler Medien eröffnen sich neue Möglichkeiten für visuelle Zugänge zu den unterschiedlichen Themen. Beispielsweise können dabei auch Animationen eingesetzt werden, die Abläufe veranschaulichen, welche ansonsten nur schwer zugänglich wären. Die Studien haben ergeben, dass die sinnvollste Verwendung der digitalen Medien darin liegt, den traditionellen Unterricht zu ergänzen und nicht zu ersetzen. Bezogen auf die Dauer der Nutzung digitaler Medien lässt sich der beste Erfolg bei kurzzeitigem Einsatz feststellen. Man kann dabei auch vom „Neuheitseffekt“ sprechen, der die Motivation beschreibt, welche bei Lernenden auftritt, wenn sie mit etwas Unbekanntem arbeiten und die traditionellen Methoden durch Neue ergänzt werden. Bei den Lernenden führen die ersten Verwendungen der digitalen Medien zu Motivationsschüben, da diese ungewohnt und spannend sind. Der größte Nutzen kann im Umgang mit digitalen Medien allgemein gezogen werden, wenn die Lernenden zuvor eine Schulung zu diesem Thema erhalten.

Die Konstellation der Lernumgebung nimmt auch einen Einfluss auf den Lernerfolg: die größten Fortschritte können hierbei erzeugt werden, wenn die Lernenden in Paaren arbeiten. Dadurch wird die Kommunikation zwischen den Lernenden angeregt, vor allem auch zwischen Lernenden, welche sich normalerweise eher nicht über mathematische Themen unterhalten würden. Der Umgang mit digitalen Medien führt auch in anderer Betrachtung zu mehr Kommunikation: die Lernenden arbeiten selbstständiger an den Themen, wenden sich bei Fragen und Problemen direkter an die Lehrkraft, als es in herkömmlichem Unterricht der Fall ist. Die Rolle der Lehrkräfte verschiebt sich auf gewisse Weise weg von einer zentralen Rolle

hin zu einer beratenden oder moderierenden Rolle.

Die Art der verwendeten Lernprogramme spielt in der Betrachtung der Nutzung digitaler Medien auch eine Rolle. Im Folgenden werden Simulationsprogramme in Betracht gezogen, da solche auch in dem durchgeführten Workshop verwendet wurden. In Simulationsprogrammen können die Lernenden ihr vorhandenes Wissen nutzen, um verschiedene Situationen zu erzeugen und abzubilden und dadurch Neues zu erlernen. Mithilfe solcher Programme können beispielsweise Experimente online durchgeführt werden, welche ansonsten weniger leicht umsetzbar wären.

Der Rest des Kapitels basiert auf [ESL23]. Im Folgenden wird das SAMR-Modell (Substitution, Augmentation, Modification, Redefinition) betrachtet: Nach diesem Stufenmodell lässt sich die Verwendung digitaler Medien für das Lernen in vier Kategorien einteilen. In der ersten Stufe des Modells werden die digitalen Medien verwendet, um analoge Methoden zu ersetzen, ohne dass sich an den Lernprozessen oder Lernzielen etwas ändert, in der zweiten Stufe wird der Handlungsspielraum vergrößert, allerdings ohne eine qualitative Lernveränderung. Diese beiden unteren Bereiche gehören im Stufenmodell zur Anreicherung, welche abzugrenzen ist von der Transformation. Zur Transformation gehört die substanzielle Veränderung von Lernprozessen und in der obersten Stufe die Neugestaltung von Lernprozessen oder -zielen, welche ohne digitale Medien nicht möglich wären. Ein Beispiel für die Transformation ist die Verwendung von Simulationen im naturwissenschaftlichen Unterricht. Die Verwendung der digitalen Medien während des Workshops sind als oberste Stufe der Transformation einzustufen, da es ohne die iPads nicht möglich gewesen wäre, das Illuminationsproblem experimentell zu erforschen.

Da für das erfolgreiche Lernen kognitive Aktivierung von Bedeutung ist, wird in diesem Abschnitt das ICAP-Modell betrachtet, das das Lernen in vier Kategorien einteilt: den passiven, den aktiven, den konstruktiven und den interaktiven Modus (ICAP ergibt sich rückwärts aus den englischen Begriffen der vier Kategorien). Im passiven Modus werden Lerninhalte nur oberflächlich verarbeitet, die Inhalte werden beispielsweise durch einen Vortrag übermittelt. Der aktive Modus beinhaltet das aktive Verhalten der Lernenden, beispielsweise durch das Aufschreiben von Notizen. Eine Möglichkeit des konstruktiven Modus stellt das selbstständige Bilden von Hypothesen zu gewissen Sachverhalten dar. Wenn die Lernenden miteinander wirken, befinden sie sich im interaktiven Modus. Die beiden letztgenannten Stufen des Modells sind für einen erfolgreichen Lernzuwachs wichtig, da die Lernenden dabei nicht nur die Lerninhalte betrachten, sondern auch kritisch reflektieren.

2.2 Planung des Workshops über Illuminationsprobleme

Das Thema meiner Masterarbeit hat sich gut angeboten, um dazu einen Workshop mit einer Schülergruppe durchzuführen. Wie man anhand des nächsten Abschnitts gut erkennen kann, haben die Lernenden bereits einen guten Grundbaustein durch ihr Vorwissen aus dem Mathematik- und Physikunterricht gesetzt und können auf diesen während der Arbeit mit dem Illuminationsproblem aufbauen. Für mich persönlich hat dieser Workshop eine gute Möglichkeit geboten, meine Masterarbeit mit meinem Interesse an der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern zu verknüpfen.

2.2.1 Bildungspläne

Ein Blick in die gymnasialen Bildungspläne des Landes Baden-Württemberg der unterschiedlichen Klassenstufen zeigt, dass sich das Thema mit Lernenden einer größeren Alters- und Niveauspanne gut umsetzen lässt. Bereits in der Grundschule kommen die Lernenden mit ersten Spiegelungen in Kontakt und in Klassenstufe 5/6 werden Achsen- und Punktsymmetrie eingeführt. Die höheren Klassenstufen beschäftigen sich in Bezug auf Spiegelungen hauptsächlich mit Spiegelungen von Graphen an unterschiedlichen Achsen in Abhängigkeit von Parametern in Funktionsgleichungen. [Kula] In der Klassenstufe 7/8 behandeln die Lernenden im Physikunterricht die Reflexion von Lichtstrahlen [Kulb]. Daher sollte ihnen ab diesem Zeitpunkt das Reflexionsgesetz geläufig sein. Dieses besagt, dass der Einfall- und Ausfallwinkel gleich groß sind.

2.2.2 Kontext: Mathematik-Informatik-Station (MAINS)

In der MAINS (Mathematik-Informatik-Station) der Heidelberg Laureate Forum Foundation wurde vom 12. Februar bis 27. August 2023 die Ausstellung „Faszination Spiegelwelten“ angeboten. Da das Illuminationsproblem auch mit Spiegeln arbeitet, hat es sich thematisch angeboten, dass ich meinen Workshop in der MAINS durchführe. Die MAINS bietet ein wechselndes Angebot zu verschiedenen Themen der Mathematik und Informatik an, wobei auch Führungen für Schulklassen angeboten werden. Im Anschluss an eine Führung am 24. Juli habe ich mit Lernenden einer 8. Klasse einer Heidelberger Gesamtschule den Workshop zum Illuminationsproblem durchgeführt. [MAI]

2.2.3 Detaillierte Planung des Ablaufs

Die Lernenden sollen im Workshop entdecken und erforschen. Das Arbeitsblatt, welches sie dabei erhalten, ist als Abrundung wie eine kleine Geschichte aufgebaut, welche die Lernenden zu Hilfsarbeitern von Dr. Ernst Straus macht. Dr. Ernst Straus sucht einen Raum, welcher durch eine einzige Lichtquelle nicht komplett erleuchtet werden kann. Die Lernenden erhalten dabei jeweils in Zweiergruppen die Arbeitsblätter, in einem browserbasierten Programm können sie dann anhand der Arbeitsaufträge von Dr. Ernst Straus an unterschiedlichen Räumen die Erleuchtbarkeit dieser testen.

Im Anschluss an die Arbeit mit den Arbeitsaufträgen werden die Beobachtungen mit den Lernenden besprochen. Dabei wird auf die Beobachtungen der Lernenden eingegangen und ihnen wird erklärt, dass es keine rationalen polygonalen Räume gibt, in denen sich unendlich viele Punkte nicht erleuchten lassen. Zum Abschluss wird der Penrose-Raum präsentiert, bei dem es zu keinem Zeitpunkt möglich ist, den kompletten Raum mit nur einer Lichtquelle zu erleuchten. Hierfür können die Lernenden anhand einer Animation die Lichtquelle im Raum verschieben und die Resultate beobachten.

Das Programm, welches während des Workshops von den Lernenden verwendet wurde, ist eine Simulation von Ray Optics Simulation:

<https://phydemo.app/ray-optics/gallery/reflect>.

Zur Veranschaulichung eines nicht erleuchtbaren Raumes wurde die folgende Simulation verwendet:

<https://demonstrations.wolfram.com/ThePenroseUnilluminableRoom/>.

Eine tabellarische Workshopskizze befindet sich im Anhang (A.3, A.4)

Einführung (ca. 10 min)

Die Einführung wird anhand einer Powerpoint-Präsentation durchgeführt.

Zunächst werden die Lernenden begrüßt, ich stelle mich vor und der Workshop wird als Teil meiner Masterarbeit an der Universität Heidelberg präsentiert. Das Illuminationsproblem wird zu diesem Zeitpunkt noch nicht genauer ausgeführt, es wird den Lernenden als aktuelles mathematisches Problem aufgezeigt, zu dem sie mit ihrem aktuellen Wissensstand selbst einiges erforschen können.

Anschließend werden gewisse Gegebenheiten des Problems mit den Lernenden besprochen, dabei wird auf die Lichtquelle, die verspiegelten Wände und das Reflexionsgesetz eingegangen.

Um einen Bezug zum Arbeitsauftrag herzustellen, werden die Lernenden als Forschungsteams von Dr. Ernst Straus vorgestellt und bekommen von diesem eine Simulation, um ihn bei der Arbeit an diesem Thema zu unterstützen. Dafür wird die Simulation geöffnet und die wichtigsten Aspekte werden gemeinsam durchgegangen, zur Veranschaulichung wird ein Viereck simuliert.

Im Anschluss wird gemeinsam das Arbeitsblatt (A.1) betrachtet und den Lernenden wird erklärt, dass sie die Hypothesen und Beobachtungen, die sie während ihres Vorgehens aufstellen, auf einem Zusatzblatt notieren sollen. Dabei wird auch erwähnt, dass diese Blätter zwar eingesammelt, aber weder bewertet noch korrigiert werden.

Die Lernenden dürfen mit ihrer Forschung beginnen, während eine Powerpoint-Folie mit „Notizen von Dr. Ernst Straus“ zur Unterstützung beim Umgang mit der Simulation eingeblendet wird.

Erste Forschungsphase: Explorieren (ca. 10 min)

Während der ersten Forschungsphase arbeiten die Lernenden an iPads.

Sie bekommen Zeit, sich mit dem Programm vertraut zu machen und können dabei schon erste Räume ausprobieren.

Erwartet wird für diese Phase zunächst das freie Explorieren anhand der Simula-

tion, vermutlich zunächst an konvexen Räumen und dann die Bildung der ersten Hypothesen mit dem Übergang zu konkaven Räumen.

Kurze Reflexion (ca. 1 min)

Mit den einzelnen Gruppen werden Gespräche geführt, in denen der aktuelle Stand betrachtet wird und die Hypothesen der Lernenden besprochen werden. Die Gruppen werden dann in die zweite Phase übergeleitet, in der die Hypothesen weiter ausgeführt werden sollen. Sollte bei einzelnen Gruppen Langeweile aufkommen, kann auch auf andere Formen der Spiegel eingegangen werden und diese Gruppen können im weiteren Vorgehen mit gebogenen Spiegeln experimentieren.

Zweite Forschungsphase (ca. 5 min)

Die Lernenden bekommen noch einmal Zeit, um weitere Hypothesen zu überprüfen.

Reflexionsgespräch (ca. 10 min)

Es wird darauf eingegangen, was die Lernenden erlebt haben, wie sie ihr Vorgehen und ihre Beobachtungen beschreiben und was für sie möglicherweise überraschend gewesen ist.

Nachdem die Lernenden diese Fragen beantwortet haben, wurde der aktuelle Wissensstand zum Illuminationsproblem präsentiert: Nach über 60 Jahren konnte bewiesen werden, dass es nicht möglich ist, ein rationales Vieleck zu finden, welches sich in gewissen Bereichen nicht erleuchten lässt.

Damit die Lernenden allerdings nicht mit dieser ernüchternden Information entlassen werden, wird zum Abschluss noch der Penrose-Raum als Beispiel für einen nicht komplett beleuchtbaren Raum gezeigt. Dieser enthält allerdings gekrümmte Wände und ist somit nicht polygonal. Mit den Lernenden werden die vorkommenden Formen besprochen: elliptische Wände, zwei Ausschnitte in Form von Pilzen/Regenschirmen. Eine Abbildung dieses Raumes befindet sich im Anhang: A.2. Die Animation des Penrose-Raums wird geöffnet und ein Lernender darf nach vorne kommen, um verschiedene Positionen der Lichtquelle auszuprobieren. Die anderen Lernenden können ihn dabei mit weiteren Ideen unterstützen.

Fragebogen (ca. 5 min) Die Lernenden bekommen einen kurzen Fragebogen zum Workshop (A.5) ausgeteilt, den sie als Rückmeldung ausfüllen.

Es werden zwei QR-Codes zu den beiden Simulationen gezeigt, falls die Lernenden sich diese im Nachhinein noch einmal anschauen möchten.

2.3 Durchführung des Workshops über Illuminationsprobleme

An dieser Stelle möchte ich auf die Umsetzung der zuvor beschriebenen Planung eingehen. Zunächst werde ich die Lernenden-Gruppe beschreiben und dann auf die Vorbereitung des Lernsettings eingehen. Im Anschluss werden die Beobachtungen beschrieben, die ich während meines Workshops machen konnte.

2.3.1 Beschreibung der Lernenden-Gruppe

Die Lernenden-Gruppe ist eine achte Klasse der Internationalen Gesamtschule Heidelberg (IGH), die aus 23 Schülerinnen und Schülern besteht. Der Kontext des Workshops war ein Ausflug der Klasse in die Spiegelwelten-Ausstellung der MAINS. Die Gruppe wurde zunächst durch die Ausstellung geführt und hat anschließend in einem anderen Raum an meinem Workshop teilgenommen.

2.3.2 Ablauf des Workshops

Zur Durchführung des Workshops wurden an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg 15 iPads ausgeliehen, an denen die Lernenden die Aufgabe während des Workshops bearbeitet haben.

Die Lernenden wurden während des Workshops in 11 Gruppen eingeteilt. Die Gruppengrößen beliefen sich dabei auf 9 Zweier- und 2 Dreiergruppen.

Zu Beginn des Workshops gab es eine kurze Einführungsphase, während der alle Lernenden vor der Leinwand in Stuhlreihen Platz nehmen konnten, damit jeder die Präsentation gut sehen konnte. Für die anschließende Forschungsphase waren weiter hinten im Raum Gruppentische vorbereitet, auf denen die Arbeitsblätter, Notizzettel und Kugelschreiber bereits auslagen und die Lernenden sich so schnell auf diese Plätze verteilen konnten.

2.3.3 Beobachtungen während des Workshops

Es ist direkt am Anfang des Workshops während der Einführung auffällig gewesen, dass einzelne Lernende kein großes Interesse an diesem zeigten und nicht motiviert waren. Den meisten Lernenden ist es schwer gefallen, ihre Gedanken in den Notizen aufzuschreiben. Ich habe sie im Durchgehen und in Gesprächen über ihre bisherigen Überlegungen immer wieder dazu motiviert, diese zu verschriftlichen. Einzelne Gruppen waren relativ früh schon gelangweilt oder hatten keine Lust und es war schwer, diese zu motivieren. Jedoch hatten auch in diesen Gruppierungen Mitglieder plötzlich wieder einen Einfall zum Problem und haben diesen ausprobiert. Andere Gruppen haben auch untereinander über das Problem diskutiert und sich so gegenseitig geholfen oder ausgetauscht, diese Gruppen waren meistens auch mit größerem Interesse mit dem Problem beschäftigt. Nicht alle Gruppen haben sich bei Fragen direkt an mich gewendet, es gab auch einige, bei denen ich gesehen habe, dass etwas nicht klappt und diese dann angesprochen habe. In manchen Fällen

hat man auch gesehen, dass die Lernenden sich gefreut haben, weil sie dachten ein Positivbeispiel gefunden zu haben, jedoch haben sie dann kurz danach gemerkt, dass es doch nicht passt und waren enttäuscht.

Während der Betrachtung des Penrose-Raums in der Animation ist mir aufgefallen, dass relativ viele Lernende kein großes Interesse mehr gezeigt haben. Die Animation wurde über den Beamer projiziert und ein Schüler hat die Lichtquelle an verschiedene Stellen gesetzt. Ihm wurde dabei zwar von anderen Lernenden mit weiteren Ideen geholfen, jedoch gab es leichte technische Schwierigkeiten, was dazu führte, dass das Interesse nachließ.

2.4 Evaluation des Workshops

Da die Evaluation des Workshops anhand von Fragebögen durchgeführt wurde, werde ich zunächst den Aufbau dieser Bögen beschreiben. Im Anschluss werden die Ergebnisse aufgezeigt, dabei wird auf die einzelnen Aspekte eingegangen, die im Fragebogen angesprochen wurden. Ebenso wird auf die Ergebnisse aus den Beobachtungen und Hypothesen der Lernenden eingegangen, welche diese auf Zusatzblättern notieren sollten. Abschließend folgt eine Diskussion des Workshops, der Ergebnisse und Erkenntnisse.

2.4.1 Fragebögen

Um an die zu Beginn besprochenen theoretischen Themen anknüpfen zu können, wurde den Lernenden ein Fragebogen ausgeteilt, den sie nach dem Workshop ausfüllen sollten. Mit Hilfe des Fragebogens sollte die Einstellung der Lernenden gegenüber den unterschiedlichen Themen ausfindig gemacht werden, außerdem konnte so eine Rückmeldung eingeholt werden, wie den Lernenden die Arbeit mit den offenen Fragestellungen gefallen hat. Der ausgegebene Fragebogen ist im Anhang zu finden (A.5).

Dieser soll mithilfe offener Fragen auf vier unterschiedliche Aspekte abzielen. In der ersten Frage wird auf den selbst wahrgenommenen Lerneffekt der Lernenden eingegangen. Im zweiten Abschnitt wird die selbst wahrgenommene Nützlichkeit hinterfragt. Die Lernenden geben an, wie nützlich sie den Umgang mit dem Illuminationsproblem fanden und sollen diese Angabe auch begründen. Die ersten beiden Fragen stehen somit in Verbindung mit Theorieteil 2.1.2. Da die Lernenden während des Workshops sehr offene Aufgaben bekommen haben, wird in der nächsten Frage auf die Einstellung der Lernenden zum Problemlösen eingegangen. Es wird hinterfragt, ob die Lernenden solche Aufgaben gerne öfter im Mathematikunterricht bearbeiten würden. Die Wichtigkeit des Problemlösens im mathematischen Lernen wurde in Abschnitt 2.1.1 dargestellt. Final wird in der letzten Frage der Workshop allgemein von den Lernenden mit Sternen bewertet und sie sollen diese Rückmeldung dann auch erklären. Dabei sind viele Lernende auch von sich aus auf die Digitalisierung (siehe Kapitel 2.1.3) eingegangen.

2.4.2 Ergebnisse

Die Kürzel pA, nA und kA stehen für positive, negative und keine Angaben.

Tabelle 2.1. Quantitative Werte, die sich aus den Rückmeldungsbögen ergeben haben

Frage	pA	nA	kA
Selbst wahrgenommener Lerneffekt	17	4	2
Selbst wahrgenommene Nützlichkeit	10	11	2
mit Begründung	6	5	
Einstellung zum Problemlösen	19	4	0
mit Begründung	17	2	
Einschätzung des Workshops	16	7	0
mit Begründung	11	6	

Von den 23 Lernenden wurden für den Workshop im Schnitt 3,8 Sterne vergeben. Die positive oder negative Bewertung in der Tabelle wurde von diesem Durchschnitt abhängig gemacht: 0-3 Sterne ergeben eine negative Angabe, 4-5 Sterne ergeben eine positive Angabe.

Selbst wahrgenommener Lerneffekt

Die Lernenden, welche den Lerneffekt positiv bewerteten, haben in den meisten Fällen geschrieben, dass sie Neues über das Verhalten von Licht, das Reflexionsgesetz, die Beleuchtung von verspiegelten Räumen oder das Illuminationsproblem gelernt haben. Einige sind dabei auch allgemein auf mathematische Probleme eingegangen.

Alle negativ bewerteten Antworten lauteten: Spiegel spiegeln. Diese Aussage habe ich negativ bewertet, da dies keine neue Erkenntnis darstellt und die Lernenden somit keine sinnvolle Angabe gemacht haben.

Selbst wahrgenommene Nützlichkeit

Die positiven Bewertungen gingen häufig mit einem Lernzuwachs über das Verhalten von Licht (3) oder dem allgemeinen Interesse an der Situation (2) einher. Ein Lernender hat auch geschrieben, dass er es interessant fand, dass man während der Bearbeitung zunächst denkt, man hätte eine Lösung gefunden und es am Ende dann aber doch nicht so ist.

Viele negative Bewertungen wurden damit begründet, dass die Lernenden keine

Räume finden konnten, die sich nicht komplett erleuchten lassen (2) oder auch damit, dass eine Lernende hinterfragt hat, ob sie das Gelernte in ihrem Leben noch einmal benötigt.

Einstellung zum Problemlösen

Drei Lernende haben das Problemlösen positiv bewertet, da sie durch die offene Aufgabenstellung sehr frei arbeiten konnten. Die meisten Lernenden haben diese Frage positiv bewertet, da sie keinen normalen Mathematikunterricht hatten oder nicht rechnen mussten (7). Die restlichen Begründungen lassen sich auf eine größere Abwechslung oder mehr Spaß zurückführen.

Die beiden negativen Angaben wurden durch Langeweile und schwerere Aufgaben beim Problemlösen begründet.

Einschätzung des Workshops

Auffällig war, dass der Umgang mit den iPads von vielen Lernenden (5) positiv bewertet wurde. Viele haben im Zusammenhang mit der positiven Bewertung angegeben, dass sie Spaß hatten.

Die negativen Bewertungen waren in einigen Fällen darauf zurückzuführen, dass das Problem nicht lösbar war (2). Außerdem wurde sowohl bei den positiven als auch bei den negativen Angaben erwähnt, dass die Bedienung der Simulation kompliziert war.

Beobachtungen und Hypothesen

Es wurden 7 Notizblätter mit Hypothesen und 6 mit Beobachtungen abgegeben. Den Lernenden ist es jedoch schwergefallen zwischen Hypothese und Beobachtung zu unterscheiden. Auf vielen Notizblättern steht „nicht möglich“ oder „unmöglich“. Einige Lernende haben als Hypothese notiert, dass mehr Ecken und Kanten benötigt werden. Eine Gruppe hat als Beobachtung die verschiedenen Formen, die sie ausprobiert hat, beschrieben oder gezeichnet. Manche Gruppen haben auch Beobachtungen oder Hypothesen notiert und im Nachhinein Abschnitte durchgestrichen oder übermalt.

2.4.3 Diskussion

Der Umgang der Lernenden mit den Problemlöse-Aufgaben kann so interpretiert werden, dass sie mit diesem Aufgabentyp nicht wirklich vertraut sind. Die Lernenden mussten stark dazu motiviert werden, ihre Gedanken zu notieren und das, was sie dann notiert haben, war nicht sehr strukturiert. Außerdem wurden an einigen Stellen auch Dinge durchgestrichen, die Lernenden haben somit nicht verstanden, dass alles was sie notieren, interessante Informationen enthält. Würden die Lernenden öfter mit solchen Aufgaben arbeiten und ermutigt, ihre Hypothesen und Beobachtungen frei zu notieren, dann würde der Umgang mit Problemlöse-Aufgaben für sie mit der Zeit einfacher. Die Lernenden haben geeignete Lösungen und erachten diese nicht für sinnvoll und streichen sie daher weg. Man hat also gemerkt, dass bei den Lernenden wenig Kompetenzen zum Problemlösen vorhanden waren: die Aufgaben stellten somit kein ihnen bekanntes Format da und es konnte kein Wissen selbstverständlich angewendet werden. Allerdings muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass im Workshop keine Schul-Situation herrschte und dies in der Schule auch anders sein könnte. Anhand der evaluierten Notizblätter konnte auch die Beobachtung gemacht werden, dass es den Lernenden hierbei schwer gefallen ist, zwischen Beobachtung und Hypothese zu unterscheiden und ihre Gedanken dabei richtig zuzuordnen.

Die auffällig positive Bewertung der iPads kann darauf zurückgeführt werden, dass die Lernenden in ihrer Schule nicht häufig mit digitalen Medien arbeiten und diese daher den in Kapitel 2.1.3 beschriebenen Neuheitseffekt hervorgerufen haben.

Durch die gewonnenen Antworten zu der selbstwahrgenommenen Nützlichkeit konnten die mathematischen Weltbilder der Lernenden analysiert werden (siehe Kapitel 2.1.2). Dabei ist aufgefallen, dass viele Lernende zwar die Nützlichkeit positiv bewertet haben, da sie durch den Workshop einen Wissenszuwachs erfahren konnten, viele aber auch eine negative Bewertung hinterlassen haben, da sie sich nicht vorstellen können, das Gelernte erneut zu benötigen. Diese Antwort spiegelt wider, dass die Lernenden Mathematik betreiben, da sie es im Unterricht benötigen und das Gelernte in Klausuren abgefragt wird, was darüber hinausgeht ist nicht relevant oder interessant für die Lernenden.

Für mein Referendariat werde ich anhand dieser Ergebnisse die Erkenntnis mitnehmen, dass es sinnvoll ist, mit den Schülerinnen und Schülern Problemlöseaufgaben zu bearbeiten und dass man durch die Verwendung digitaler Medien eine größere Motivation seitens der Lernenden erzielen kann. Die Nutzung digitaler Medien im Mathematikunterricht kann in vielen Bereichen sinnvoll sein, beispielsweise auch während der Betrachtung von Funktionen, welche von unterschiedlichen Parametern abhängig sind. Durch Simulationen können hier schnell verschiedene Fälle betrachtet werden, ohne die Notwendigkeit der Zeichnung vieler Graphen. Gut gefallen hat mir dabei auch, dass die Lernenden relativ offen mit ihren Fragen auf mich zugekommen sind und sich nicht vor Nachfragen oder Diskussionen gescheut haben. Für den Mathematikunterricht ist die, bereits im Theorieteil beschriebene, wechselnde Lehrerrolle ein positiver Einfluss, da man die Lernenden gezielt bei ihren Problemen unterstützen kann.

Literatur

- [AW21] Paul Apisa und Alex Wright. „Marked points on translation surfaces“. In: *Geometry & Topology* 25.6 (2021), S. 2913–2961.
- [ESL23] Thérèse Eder, Katharina Scheiter und Andreas Lachner. „Einsatz digitaler Medien für einen wirksamen Unterricht“. In: *Wirksamer Unterricht* (2023).
- [EW10] Manfred Einsiedler und Thomas Ward. *Ergodic theory*. 2010.
- [GJ00] Eugene Gutkin und Chris Judge. „Affine mappings of translation surfaces: geometry and arithmetic“. In: (2000).
- [Hil+17] Delia Hillmayr u. a. *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe. Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Münster: Waxmann, 2017.
- [Hru18] Seval Hrustic. *Problemlösen im Mathematikunterricht*. 2018.
- [HS06] Pascal Hubert und Thomas A Schmidt. *An introduction to Veech surfaces*. 2006.
- [Kula] Ministerium für Kultus; Jugend und Sport Baden-Württemberg. *Mathematik-Bildungsplan*. URL: <https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M>. accessed: 01.08.2023.
- [Kulb] Ministerium für Kultus; Jugend und Sport Baden-Württemberg. *Physik-Bildungsplan*. URL: <https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/PH>. accessed: 01.08.2023.
- [LMW16] Samuel Lelievre, Thierry Monteil und Barak Weiss. „Everything is illuminated“. In: *Geometry & Topology* 20.3 (2016), S. 1737–1762.
- [Lub91] Boris D Lubachevsky. „How to simulate billiards and similar systems“. In: *Journal of Computational Physics* 94.2 (1991), S. 255–283.
- [MAI] MAINS. *Mathematik-Informatik-Station*. URL: www.heidelberg-mains.org/. accessed: 25.07.2023.
- [MT02] Howard Masur und Serge Tabachnikov. „Rational billiards and flat structures“. In: *Handbook of dynamical systems*. Bd. 1. Elsevier, 2002, S. 1015–1089.
- [Oxt52] John C Oxtoby. „Ergodic sets“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 58.2 (1952), S. 116–136.
- [Ran13] Anja Randecker. *Dreiecksgruppen, die als Veechgruppen auftreten*. 2013.

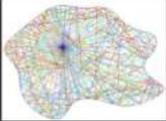
- [Ran16] Anja Rancker. *Geometry and topology of wild translation surfaces*. KIT Scientific Publishing, 2016.
- [Ran17] Anja Rancker. *Skript zur Vortragsreihe „Unendliche Translationsflächen“*. 2017.
- [Ros] Universität Rostock. *Kapitel 6 - Hamiltonsche Mechanik*. URL: https://www.uni-rostock.de/storages/uni-rostock/Alle_MNF/Physik_Qms/Lehre_Scheel/theo_II/Theor_Phy_II_Kapitel_6_-_Hamiltonsche_Mechanik.pdf. accessed: 22.09.2023.
- [Sem] II Seminar zur Funktionentheorie. „Kongruenzuntergruppen und diskontinuierliche Gruppen“. In: ().
- [Soe23] Wolfgang Soergel. *Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie*. 2023.
- [Tok95] George W Tokarsky. „Polygonal rooms not illuminable from every point“. In: *The American Mathematical Monthly* 102.10 (1995), S. 867–879.
- [Vee89] William A Veech. „Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards“. In: *Inventiones mathematicae* 97 (1989), S. 553–583.
- [Wey21] Benedikt Weygandt. *Mathematische Weltbilder weiter denken*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2021.
- [Wol19] Amit Wolecki. *Illumination in Rational Billiards*. 2019.

A

Anhang

A.1 Fachdidaktischer Teil

Forschungsteam von Dr. Ernst Straus



 **Forschungsauftrag**
Herr Straus ist auf der Suche nach verspiegelten Räumen, die sich durch eine Lichtquelle nicht vollständig beleuchten lassen. Ihr seid sein ausgewähltes Forschungsteam und sollt ihn bei dieser Suche unterstützen.

 **Forschungsphase**
Macht euch mit dem Programm bekannt und sucht für Herrn Straus nach solchen Räumen. Welche Hypothesen könnt ihr dabei formulieren? Wie könnt ihr eure Räume verändern, um seinen Arbeitsauftrag zu erfüllen?

 **Beobachtung**
Welche Beobachtungen könnt ihr während eurer Arbeit mit dem Programm machen? Was überrascht euch vielleicht auch dabei?

Abbildung A.1. Arbeitsblatt des Workshops

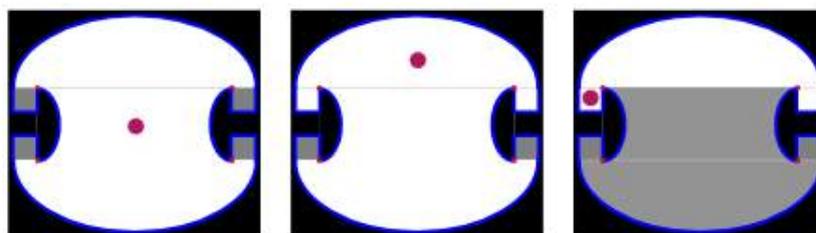


Abbildung A.2. Penrose-Raum, Grafik entnommen aus: <https://mathworld.wolfram.com/IlluminationProblem.html>

10min	<p>Einführung Begrüßung der SuS, Vorstellung von mir: Masterstudentin an der Uni HD, Lehramt Mathematik und Chemie; Workshop im Zuge meiner Masterarbeit Einstieg in das Thema: Bild von Dr. Ernst Straus → mathematisches Problem existiert, aktuelle Forschung, dazu könnt ihr auch schon vieles und könnt daher an diesem Problem arbeiten Vorüberlegungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Alle Wände der Räume sind aus verspiegeltem Material ▪ Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel ▪ Lichtstrahlen werden unendlich oft weitergespiegelt <p>er hat ein mathematisches Problem gefunden, dass noch nicht gelöst ist und benötigt dafür die Hilfe eines Forschungsteams. Ihr seid dieses Forschungsteam und habt extra eine Simulation bekommen, mit dem ihr Herrn Straus bei seiner Suche unterstützt.</p> <p>Erklärungen an Hand des Programms:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Funktionsweise des Programms 4-Eck simulieren (wird auch am Ende als Überblick während der Forschungsphasen der SuS mit dem Beamer projiziert) <ul style="list-style-type: none"> - Anrasten - Objekte sperren - Spiegel Segment <p>Gemeinsame Betrachtung des Abs</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Hypothesen und Beobachtungen auf dem beigefügten Blatt notieren ▪ Diese Blätter werden nicht bewertet, aber ich sammel sie am Ende ein, da es für meine Masterarbeit interessant ist: mich interessiert, wie ihr mit den Forschungsfragen umgeht <p>Notizen von Herrn Straus als Unterstützung während der Arbeit</p>
10min	<p>Erste Forschungsphase: Explorieren Die SuS bekommen Zeit, sich mit dem Programm vertraut zu machen und können dabei schon erste Räume ausprobieren Erwartungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Zunächst wildes explorieren (vermutlich an konvexen Räumen) <p>Dann bilden von ersten Hypothesen: testen von konkaven Räumen</p>
1min	<p>Gespräche mit den einzelnen Gruppen: aktuellen Stand anschauen, im Gespräch gebildete Hypothesen besprechen und die Gruppen dann für die zweite Phase weiterführen Worauf würdet ihr achten, wenn ihr einen solchen Raum bauen sollt?</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Mehr Ecken und Zacken in die Räume einbauen <p>Wenn einzelne Gruppen schon sehr weit sind oder Langeweile aufkommt: wie könnten die Räume noch verändert werden, damit es funktioniert? (auf welche Art von Spiegeln haben wir uns bisher beschränkt?) → gebogene Spiegel</p>
5min	<p>Zweite Forschungsphase Die SuS bekommen noch einmal Zeit, um weitere Hypothesen zu überprüfen.</p>

Abbildung A.3. Verlaufsskizze des Workshops Teil 1

10min	<p>Reflexionsgespräch</p> <p>Was habt ihr erlebt?</p> <p>Wie seid ihr allgemein vorgegangen?</p> <p>Welche Beobachtungen konnten gemacht werden? Es konnte kein solcher Raum gefunden werden</p> <p>Was hat daran überrascht? Egal wie viele Ecken man eingebaut hat, hat es nicht funktioniert</p> <p>Das haben die Mathematiker auch gemacht! 68 Jahre, bis das bewiesen wurde</p> <p>Tatsächlich ist es, wie ihr jetzt auch vermuten konntet, nicht möglich ein Vieleck zu finden (! Rationalität!), dass sich in gewissen Bereichen nicht erleuchten lässt, das wurde aber auch erst 2018 herausgefunden.</p> <p>Lag das vielleicht an der Arbeitsvorschrift? Nur Geraden betrachtet, keine Krümmungen</p> <p>Ich habe aber ein Beispiel mitgebracht für einen Raum, in dem das funktioniert. Geniale Idee: Er wurde von Roger Penrose entdeckt und enthält gekrümmte Wände. Zuerst den Raum zeigen: sieht schonmal sehr komisch aus, oder? und die Formen besprechen, die vorkommen (zwei elliptische Wände, zwei Ausschnitte in der Form von Pilzen/Regenschirmen). → 8 Jahre benötigt, um den Raum zu finden</p> <p>Die Animation des Penrose-Raums wird geöffnet und ein SchülerIn darf nach vorne kommen, um Positionen der Lichtquelle auszuprobieren.</p> <p>Die anderen SuS können ihn dabei mit weiteren Ideen unterstützen.</p>
3min	<p>Fragebogen</p> <p>Die SuS bekommen einen kurzen Fragebogen zum Workshop, den sie als Feedback ausfüllen.</p> <p>Wer Lust hat darf sein Handy auspacken und die QR-Codes einscannen, wenn man es nochmal anschauen will</p>

Abbildung A.4. Verlaufsskizze des Workshops Teil 2

Rückmeldung zum Workshop

Was hast du aus deiner Sicht heute gelernt?



Wie nützlich fandest du die Beschäftigung mit dem Illuminationsproblem? Warum?



Sollte es solche „Forschungsaufgaben“ öfter in eurem Matheunterricht geben? Wenn ja/nein, warum?



Wie viele Sterne würdest du dem Workshop geben und warum? ☆ ☆ ☆ ☆ ☆



Abbildung A.5. Fragebogen zur Evaluation des Workshops