

Der „Hut“ – ein Einstein

mit Anwendungsmöglichkeiten im Schulkontext

Masterarbeit im Fach Mathematik im Master of Education
eingereicht von

Hanna Friederike Klein

Matrikelnummer: 3447022

Abgabe: 21. Dezember 2023

Erstprüferin:
Beatrice Pozzetti

Zweitprüferin:
Anja Randecker

Abstract

Im März 2023 wurde die Hut-Fliese, ein hutförmiges 13-Eck veröffentlicht. Mit Kopien dieser einen Fliese kann die Ebene aperiodisch parkettiert werden. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Grundlagen zur Parkettierung der Ebene und die Hut-Fliese eingeführt. Danach wird durch die Konstruktion von Metafliesen und der Einführung eines Substitutionssystems gezeigt, dass die Hut-Fliese die Ebene parkettiert. Abschließend wird ein Entwurf vorgestellt, wie eine Unterrichtsstunde in der 5. oder 6. Klasse zu Parkettierungen und zur Hut-Fliese aussehen könnte.

The „hat“ is a hat-shaped polygon that was introduced in a publication in March 2023. This monotile admits aperiodic tilings of the plane. At the beginning of this thesis the basics of tilings of the plane and the hat tile are introduced. The proof that the hat admits tilings of the plane is given by constructing the so-called metatiles and a substitution system. Finally, a draft is presented how a lesson in the 5th or 6th grade about tilings and the hat could look like.

Der „Hut“ - ein Einstein

mit Anwendungsmöglichkeiten im Schulkontext

Hanna Friederike Klein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und historischer Hintergrund	1
2	Was ist eine Parkettierung in \mathbb{R}^2?	4
2.1	Grundlegende Definitionen und Beispiele	4
2.2	Periodische, nicht-periodische und aperiodische Parkettierungen	9
3	Die Aperiodizität des Huts	17
3.1	Der Hut	17
3.2	Metafliesen	21
3.3	Das Substitutionssystem	24
3.4	Parkettierungen mit der Hut-Fliese	35
4	Anwendungsmöglichkeiten im Schulkontext	38
4.1	Grundidee	38
4.2	Ablauf	39
4.3	Materialien	41
5	Anhang	56
5.1	Literaturverzeichnis	56

1 Einleitung und historischer Hintergrund

Im Allgemeinen kann das lückenlose Auslegen einer Fläche mit Fliesen einer bestimmten Form eine sehr schwierige mathematische Aufgabe sein. Vor allem die nicht-periodischen Parkettierungen sind dabei besonders interessant, da ihr Muster sich niemals regelmäßig wiederholt.

Im März dieses Jahres machte die Entdeckung der lang ersehnten Einstein-Fliese Schlagzeilen.¹ Der Name der Fliese steht in keinem Zusammenhang mit einem berühmten Wissenschaftler, sondern ist darauf zurückzuführen, dass lediglich *eine* Fliese für die aperiodische Parkettierung benötigt wird (engl. *monotile*). Das heißt, die Ebene kann mit Kopien dieser einen Fliese so ausgelegt werden, dass die Ebene lückenlos bedeckt ist und sich ausschließlich nicht-periodische Muster ergeben, also Muster die sich niemals regelmäßig wiederholen. Insbesondere sind bei der Einstein-Fliese auch gespiegelte Fliesenkopien zulässig (vgl. Abb. 1), da sozusagen auch der „umgedrehte Stein“, also die Rückseite der Fliese verwendet werden darf.

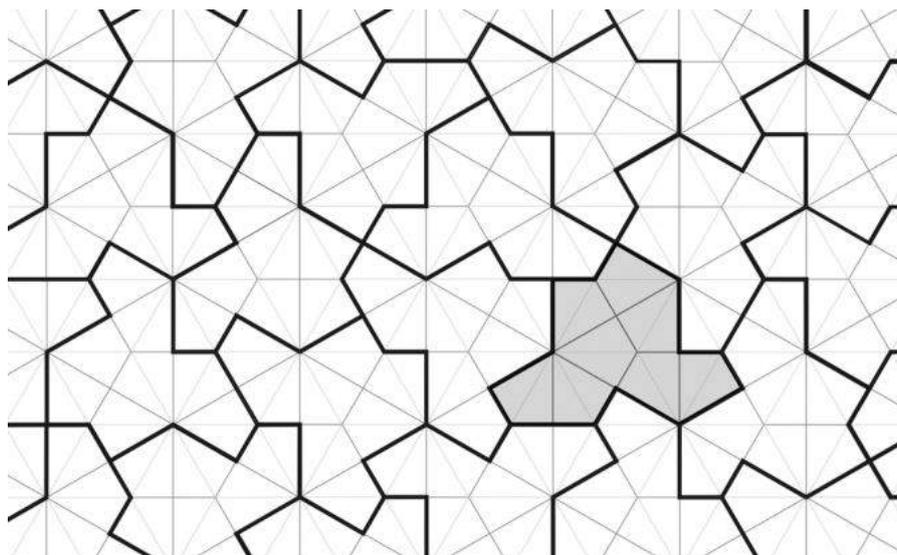


Abbildung 1: Die im März 2023 veröffentlichte hutförmige Fliese ist ein Einstein, sie parkettiert die Ebene aperiodisch. (Ausschnitt einer Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS].)

¹Artikel vom 29.03.2023 auf Spektrum.de von Manon Bischoff verfasst, unter <https://www.spektrum.de/news/hobby-mathematiker-findet-lang-ersehnte-einstein-kachel/2124963> zuletzt aufgerufen am 21.12.2023.

Bei der im März 2023 veröffentlichten Einstein-Fliese handelt es sich um ein hutförmiges 13-Eck (vgl. Abb. 2), weshalb sie auch „Hut“ genannt wird.

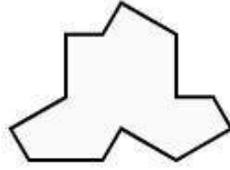


Abbildung 2: Die hutförmige Fliese, in der einige eher ein zerrissenes T-Shirt sehen. (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS].)

Schon Jahrzehnte lang untersuchen Mathematikerinnen und Mathematiker, mit welchen Fliesenformen eine Ebene lückenlos bedeckt werden kann (nach Bischoff, vgl. [Bi]). Bisher wurden dafür immer mehrere unterschiedlich geformte Fliesen benötigt. Erst 1974 präsentierte der Physiker Roger Penrose zwei verschiedene Fliesenformen (nach Bischoff, vgl. [Bi]), mit denen gemeinsam die Ebene ausschließlich nicht-periodisch parkettiert werden kann (vgl. Abb. 3).

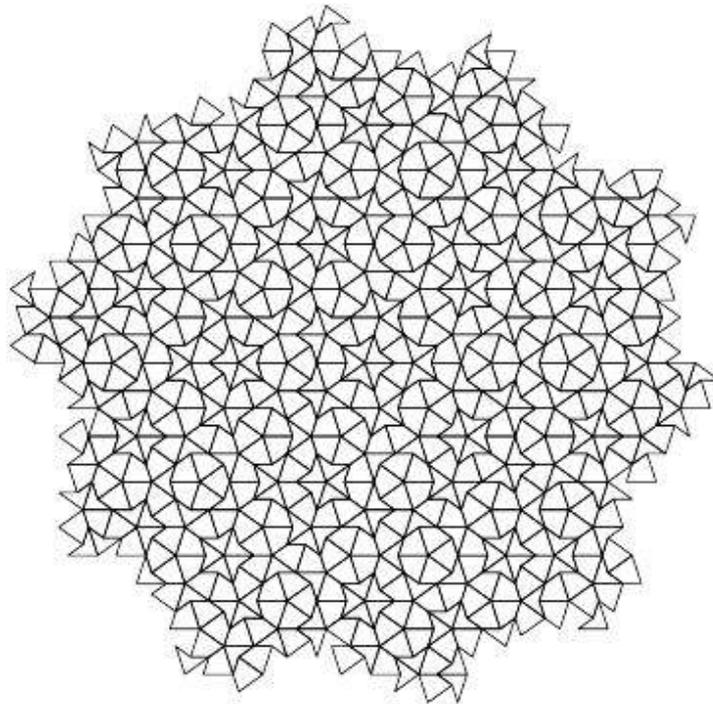


Abbildung 3: Ausschnitt aus einer aperiodischen Penrose-Parkettierung mit *Darts* und *Kites*. (Zuletzt aufgerufen unter <https://fronkonstin.com/wp-content/uploads/2019/06/step4.SegmentTes-1.png> am 21.12.2023.)

Nach einer einzelnen Fliese, die dies erfüllt, wurde lange gesucht und bis zu ihrer Entdeckung war nicht klar, ob eine solche Fliese überhaupt existiert (nach Bischoff, vgl. [Bi]). „Doch im November 2022 glaubte der pensionierte Druckanlagentechniker David Smith aus Yorkshire, eine solche Einstein-[Fliese] gefunden zu haben. Als er den mathematikbegeisterten Informatiker Craig Kaplan von der University of Waterloo darauf aufmerksam machte, erkannte dieser schnell das Potential der [Fliese]: Zusammen mit dem Softwareentwickler Joseph Samuel Myers und dem Mathematiker Chaim Goodman-Strauss von der University of Arkansas konnte er tatsächlich beweisen, dass die Fliese eine Ebene lückenlos und ohne regelmäßige Wiederholung [parkettiert]. [...] Ihre Ergebnisse haben sie [im März 2023] in einer noch nicht begutachteten Arbeit veröffentlicht.“² Diese Veröffentlichung stellt die Hauptquelle des Theorieteils der hier vorliegenden Masterarbeit dar.

Im theoretischen Teil zu Beginn dieser Arbeit werden Parkettierungen der Ebene im Allgemeinen (vgl. Kapitel 2) und Parkettierungen mit der Hut-Fliese im Speziellen (vgl. Kapitel 3) näher betrachtet. Die faszinierende Entdeckung, dass der Hut die Ebene aperiodisch parkettiert, stellt das große Ergebnis dieses ersten Teils dar. Die hierfür benötigten Argumente werden sukzessive aufgeführt, an geeigneten Beispielen verdeutlicht und in Teilen bewiesen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit (vgl. Kapitel 4) wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie dieses aktuelle und mathematische Thema in den Schulkontext eingebunden und mit Lernenden behandelt werden kann. Das Vorgehen wird dabei didaktisch begründet.



Abbildung 4: Hut-Puzzle. (Eigene Aufnahme)

²Wörtliches Zitat von Manon Bischoff aus ihrem Artikel auf Spektrum.de (vgl. [Bi]).

2 Was ist eine Parkettierung in \mathbb{R}^2 ?

Da es in dieser Arbeit um die Parkettierung der Ebene mit der Hut-Fliese geht, werden in diesem Kapitel die Grundlagen, was eine Parkettierung ist und welche verschiedenen Typen es gibt, behandelt. Dafür werden zunächst einige, erforderliche Definitionen eingeführt. Anzumerken ist, dass im Rahmen dieser Arbeit lediglich die Parkettierung der Ebene, also des \mathbb{R}^2 relevant ist. Deshalb wird sich in dieser Arbeit auf die eingeführten Definitionen, die nur im \mathbb{R}^2 gültig sind, beschränkt. Daneben sind in der Literatur auch Parkettierungen der reellen Achse \mathbb{R} und des reellen Raums \mathbb{R}^3 zu finden. Diese werden hier jedoch nicht betrachtet.

2.1 Grundlegende Definitionen und Beispiele

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird das für die darauffolgenden Abschnitte und Kapitel notwendige Fachvokabular eingeführt. Durch einzelne Beispiele und Abbildungen werden bestimmte Begriffe veranschaulicht. Zuerst werden die grundlegenden Begriffe der Fliese und der Parkettierung in \mathbb{R}^2 definiert.

Definition 2.1.1: Eine **Fliese** in \mathbb{R}^2 ist eine abgeschlossene Menge an Punkten aus diesem Raum. Eine **Parkettierung** der Ebene durch eine Menge F an Fliesen ist eine Sammlung an Bildern von Fliesen aus F unter Isometrie³, deren Innenbereiche paarweise disjunkt⁴ sind und deren Vereinigung dem ganzen Raum entspricht⁵; es wird gesagt, dass eine Menge an Fliesen **eine Parkettierung zulässt** oder auch **die Ebene parkettiert**.

Bemerkung: In den meisten Fällen ist es sinnvoll, dass Fliesen nicht-leere, kompakte Mengen sind, die der Abschluss ihres Inneren sind; die Fliesen, die hier betrachtet werden, sind Vielecke. Daneben ist es möglich, allgemeinere Formen als Vielecke zuzulassen,

³Eine Isometrie ist eine Abbildung, die zwei metrische Räume aufeinander abbildet und dabei die Metrik – also die Abstände zwischen je zwei Punkten – erhält; d. h. die ursprünglichen Fliesen werden längenerhaltend und bspw. „gedreht“ abgebildet.

⁴Das heißt, dass kein Punkt der Ebene im Inneren von zwei (oder mehr) Fliesen liegt bzw. verschiedene Fliesen höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

⁵Jeder Punkt der Ebene gehört also zu mindestens einer Fliese.

insbesondere jede Teilmenge der Ebene, die homöomorph⁶ zur abgeschlossenen Kreisscheibe ist; also jeder Bereich der Ebene, der durch eine geschlossene Kurve begrenzt ist, die sich selbst nicht schneidet. Im Folgenden wird dies als **abgeschlossene topologische**⁷ **(Kreis-)Scheibe** bezeichnet.

Die nächsten Begriffe sind wichtig, da diese Arbeit auf eine Parkettierung der Ebene mit einem einzigen Fliesentyp abzielt.

Definition 2.1.2: Eine Parkettierung heißt **monoedrisch**, falls alle ihre Fliesen kongruent⁸ zueinander sind. In einem solchen Fall kann eine beliebige Fliese herausgegriffen und als **Protofliese** bezeichnet werden.

Eine Verschärfung dieser Definition stellt die Eigenschaft isoedrisch dar. Für diese wird zuvor jedoch der Begriff der Symmetriebahn benötigt. Dieser soll nun definiert und erläutert werden.

Definition 2.1.3: Sei G eine Gruppe, die auf eine Menge X wirkt. Die **Bahn** eines Elements $x \in X$ ist die Menge der Elemente in X , in die x durch die Elemente von G verschoben werden kann. Die Bahn von x ist durch

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

gegeben. Die Menge aller Bahnen von X unter der Wirkung von G wird als **Wirkungsquotient** X/G bezeichnet.

Damit lässt sich nun die nächste Definition einführen. Sie stellt eine Steigerung der monoedrischen Parkettierung dar.

⁶Es existiert eine bijektive, stetige Abbildung zwischen (diesen) zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist (nach [MT]).

⁷Eine Eigenschaft heißt topologisch, wenn sie bei Homöomorphismen erhalten bleibt (nach [MT]).

⁸Zwei Teilmengen A, B des \mathbb{R}^2 heißen **kongruent** oder deckungsgleich, wenn sie durch eine Symmetrie aufeinander abgebildet werden.

Definition 2.1.4: Eine Parkettierung in \mathbb{R}^2 heißt **isoedrisch** oder flächentransitiv, wenn all ihre Fliesen⁹ gleich sind. Insbesondere müssen alle Fliesen nicht nur kongruent, sondern auch transitiv sein, d. h. sie müssen auf derselben (Symmetrie-)Bahn liegen. Mit anderen Worten: Für zwei beliebige Fliesen A und B muss es eine Symmetrie der gesamten Ebene geben, die durch Verschiebung, Drehung und/oder Spiegelung A auf B abbildet.¹⁰

Um die eingeführten Definitionen zu veranschaulichen, folgen konkrete Beispiele zu Parkettierungen der reellen Ebene \mathbb{R}^2 . Da jedoch nicht die ganze Ebene in einem Bild darstellbar ist, handelt es sich bei den Abbildungen lediglich um Ausschnitte, die „auf die gleiche Weise“ fortgesetzt gedacht werden müssen.

Beispiel 2.1.5: (a) Die Parkettierung der Ebene durch Quadrate mit Seitenlänge eins ist isoedrisch (vgl. Abb. 5).

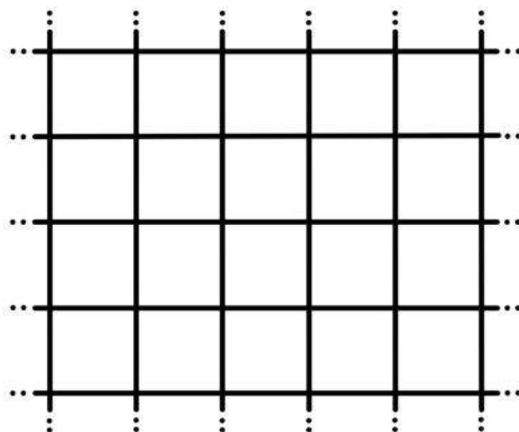


Abbildung 5: Ausschnitt einer isoedrischen Parkettierung der Ebene mit Einheitsquadraten. (Eigene Darstellung nach Ritter, vgl. [Ri].)

(b) Durch Zerlegen der Quadrate in Dreiecke wird (a) zu einer Parkettierung mit gleichschenkligen Dreiecken, die ebenfalls isoedrisch ist (vgl. Abb. 6).

⁹Allgemeiner „Flächen“; da eine Fläche in der elementaren Geometrie ein Vieleck oder eine euklidische Fliese ist, wird hier direkt der Begriff der Fliese verwendet.

¹⁰Definition nach Wikipedia – the free encyclopedia (vgl. [Wi]).

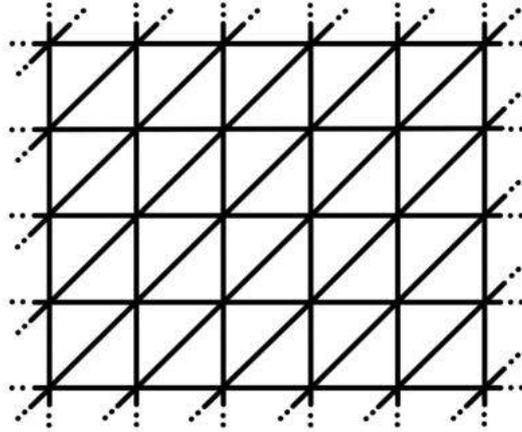


Abbildung 6: Ausschnitt einer isoedriscen Parkettierung der Ebene mit gleichschenkligen Dreiecken. (Eigene Darstellung nach Ritter, vgl. [Ri].)

- (c) Die Parkettierung aus (a) wird durch Teilen der Quadrate entlang einer ihrer Diagonalen, außer eines einzigen Quadrats, das entlang der anderen Diagonale geteilt wird, zu einer monoedriscen Parkettierung (vgl. Abb. 7).

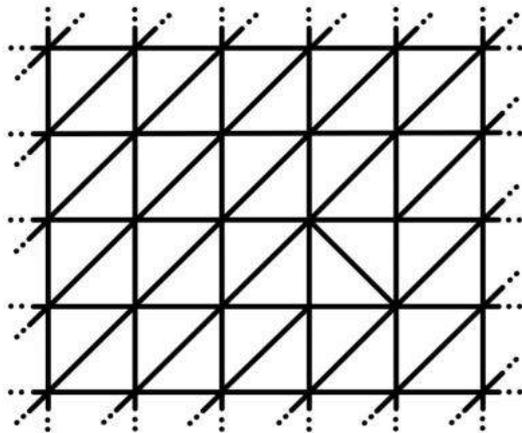


Abbildung 7: Darstellung einer monoedriscen Parkettierung. (Eigene Darstellung nach Ritter, vgl. [Ri].)

- (d) Eine Parkettierung, die zwei Typen von Fliesen verwendet und aus der Parkettierung mit Quadraten entsteht, nachdem die Form der Quadrate verändert wurde (vgl. Abb. 8), ist weder isoedrisc noch monoedrisc, da sie zwei verschiedene Fliesentypen verwendet.

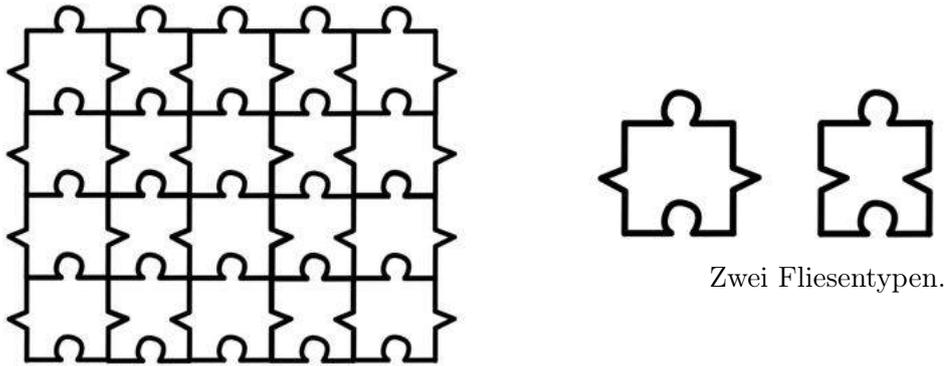


Abbildung 8: Skizzierter Ausschnitt einer komplizierteren Parkettierung durch Veränderung der Form der Einheitsquadrate. (Eigene Darstellung nach Ritter, vgl. [Ri].)

Bemerkung: Alle hier betrachteten Parkettierungen sind außerdem **lokal begrenzt**. Das bedeutet, dass jeder Punkt eine offene Nachbarschaft besitzt, die nur begrenzt viele Fliesen trifft.

Als nächstes werden weitere Begriffe definiert, die für die Beschreibung der einzelnen Fliesen und der gegenseitigen Lage mehrerer Fliesen relevant sind.

Definition 2.1.6: In jeder lokal begrenzten Parkettierung der Ebene durch abgeschlossene topologische Kreisscheiben sind die verbundenen Komponenten des Schnitts von zwei oder mehr Fliesen isolierte Punkte, die als **Eckpunkte** der Parkettierung bezeichnet werden, und endliche Strecken, die sogenannten **Kanten** der Parkettierung. Der **Rand** jeder Fliese ist in endlich viele Kanten unterteilt, die sich mit Eckpunkten abwechseln. Jede Kante liegt auf dem Rand von genau zwei Fliesen, die als auf gegenüberliegenden Seiten der Kante liegend bezeichnet werden. Zwei unterschiedliche Fliesen sind **Nachbarn**, wenn sie einen beliebigen Punkt ihrer Ränder, und **Angrenzer**, wenn sie eine Kante teilen.

Wenn eine (abgeschlossene topologische Scheibe) Fliese einen vieleckigen Rand hat, werden die maximalen Liniensegmente, die auf diesem Rand liegen, als **Seiten** bezeichnet und die einzelnen Punkte zwischen zwei Seiten als **Ecken**. Diese Bezeichnungen werden verwendet, um sie von den Kanten und Eckpunkten einer Parkettierung zu unterscheiden. Aus dem Kontext ist zu unterscheiden, ob der Begriff „Seite“ sich auf die Seiten eines Vielecks oder auf die beiden Seiten einer Kante einer Parkettierung bezieht. Des Wei-

teren heißt eine Parkettierung aus Vielecken **kantengenau** (engl. *edge-to-edge*), wenn die Ecken und Seiten der Vielecke mit den Eckpunkten und Kanten der Parkettierung übereinstimmen.

2.2 Periodische, nicht-periodische und aperiodische Parkettierungen

Parkettierungen lassen sich in verschiedene Typen unterteilen, je nachdem ob sie eine gewisse Symmetrie aufweisen oder nicht. Deshalb werden im Folgenden die Symmetrien des \mathbb{R}^2 klassifiziert. Hierfür sind die Definitionen einer allgemeinen Symmetrieoperation und der konkreten Symmetrien in \mathbb{R}^2 nötig. Anschließend werden die verschiedenen möglichen Parkettierungen der Ebene definiert und durch Beispiele veranschaulicht.

Definition 2.2.1: Eine **Symmetrieoperation** auf \mathbb{R}^2 ist eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{v}$$

mit $A \in O_2(\mathbb{R})$ ¹¹ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Mit $Sym(E)$ wird die **Gruppe aller Symmetrieoperationen auf E** bezeichnet.

Daraus ergeben sich die folgenden Symmetrien für die Ebene \mathbb{R}^2 (nach Modler und Kreh, Satz 12.3, vgl. [MK]).

Satz 1 (Klassifikation der Symmetrien): Jede Symmetrie von \mathbb{R}^2 ist zu genau einer der folgenden Symmetrien konjugiert¹².

- (i) Die Identität $Id_{\mathbb{R}^2}$ (das neutrale Element von $Sym(\mathbb{R}^2)$).

¹¹Gruppe der orthogonalen Matrizen in \mathbb{R}^2

¹²Zwei Elemente h_1 und h_2 einer Gruppe G heißen zueinander konjugiert, wenn ein Element $g \in G$ existiert, sodass $h_1 = gh_2g^{-1}$ gilt. Die Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Eine Translation um einen Vektor der Länge $c > 0$ in Richtung der x_1 -Achse, das heißt

$$t_c(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + c \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Eine Drehung um den Ursprung mit einem Winkel $\alpha \in (0, \pi]$, das heißt

$$d_\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

(iv) Die Spiegelung an der x_1 -Achse, das heißt

$$s(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

(v) Eine Gleitspiegelung an der x_1 -Achse, also die Komposition

$$s_c(\vec{x}) = t_c \circ s(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + c \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

mit $c > 0$.

Bemerkung: Des Weiteren wird folgende Definition einer **Translation** verwendet:

$$t_{(a,b)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + a \\ x_2 + b \end{pmatrix}$$

für $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Diese ist zu obiger Translation (vgl. Satz 1)

$$t_c(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + c \\ x_2 \end{pmatrix}$$

für einen Vektor der Länge $c > 0$ konjugiert.

Beweis: Die Abbildung $t_{(a,b)}$ ist nach Definition 2.2.1 eine Symmetrieoperation mit $A = E_2$, wobei E_2 die Einheitsmatrix des \mathbb{R}^2 ist, und $\vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Also ist zu zeigen, dass es ein $\phi \in \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$ gibt, sodass $t_c(\vec{x}) = \phi^{-1} \circ t_{(a,b)} \circ \phi$ gilt und $t_c(\vec{x})$ eindeutig ist. Setze $c := |\vec{v}|$ fest, also als die Länge des Vektors \vec{v} . Dann gibt es eine eindeutige Drehung $d_\alpha \in \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$ mit $d_\alpha(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$. Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(d_\alpha \circ t_{(a,b)} \circ d_\alpha^{-1})(\vec{x}) = d_\alpha(d_\alpha^{-1}(\vec{x}) + \vec{v}) = \vec{x} + d_\alpha(\vec{v}) = \vec{x} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setze $\phi := d_\alpha^{-1}$. Damit ist bewiesen, dass die verwendete Darstellung einer Translation konjugiert zu der in Satz 1 definierten Translation ist. \square

Auf dieser Grundlage werden nun die verschiedenen Parkettierungstypen eingeführt. Als erstes wird die periodische Parkettierung definiert und anhand eines Beispiels veranschaulicht.

Definition 2.2.2: Eine Parkettierung in \mathbb{R}^2 heißt **periodisch**, falls sie zwei Translationssymmetrien in zwei nicht-parallele Richtungen aufweist. Dabei wird unter einer Translationssymmetrie verstanden, dass durch eine Translation alle Punkte einer Parkettierung wieder auf sich selbst abgebildet werden.

Beispiel 2.2.3: Die bereits oben abgebildete Parkettierung mit Einheitsquadraten (vgl. Abb. 5) besitzt für $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Translationssymmetrien

$$t_{(n,m)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + n \\ x_2 + m \end{pmatrix}.$$

So sind beispielsweise

$$t_{(1,0)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$t_{(0,1)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

zwei nicht-parallele Translationen, die die Parkettierung auf sich selbst abbilden. Damit ist diese Parkettierung, wie erwartet, periodisch. \square

Der zweite Typ, der nun betrachtet wird, ist die nicht-periodische Parkettierung. Sie ist ein erster Schritt in Richtung Aperiodizität.

Definition 2.2.4: Eine Parkettierung heißt **nicht-periodisch**, falls sie keine Translationssymmetrie aufweist.

Beispiel 2.2.5: Betrachte erneut die Parkettierung mit einheitlichen Quadraten (vgl. Abb. 5). Teile alle Quadrate entlang einer ihrer Diagonalen, außer eines einzigen Quadrats, das entlang der anderen Diagonale geteilt wird (vgl. Abb. 7). Dies ergibt eine nicht-periodische Parkettierung, da nun keine Translationssymmetrien mehr vorhanden sind.

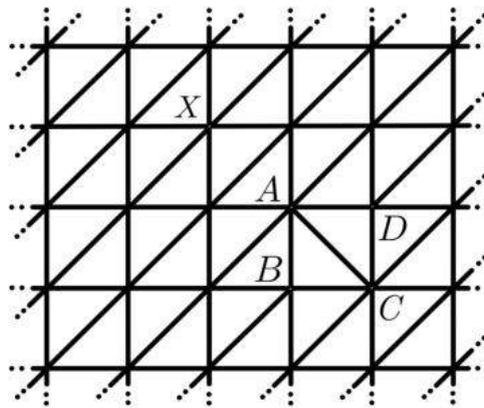


Abbildung 9: Benennung der Eckpunkte des Quadrats, das entlang der anderen Diagonale geteilt wird, mit A , B , C , D und eines weiteren Eckpunkts der Parkettierung mit X . (Eigene Darstellung.)

Beweis: Um zu beweisen, dass die Parkettierung in Abbildung 7 nicht-periodisch ist, wird gezeigt, dass keine Translation existiert, die diese Parkettierung auf sich selbst abbildet. Dazu wird zunächst angenommen, dass es eine solche Translation gibt, und dies zum Widerspruch geführt.

Sei also $t_{(a,b)}$ mit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine Translation, die die Parkettierung auf sich selbst abbildet. Die Bezeichnung der Eckpunkte erfolgt entsprechend der Beschriftung in Abbildung 9. Nach Konstruktion treffen in den Eckpunkten A und C sieben Kanten aufeinander. In den Eckpunkten B und D treffen fünf Kanten aufeinander. An allen anderen Eckpunkten der Parkettierung, wie beispielsweise am Punkt X , treffen sechs Kanten aufeinander.

Da nach Definition (vgl. Bemerkung nach Satz 1) die betrachtete Translation verschieden von der Identität sein soll, gilt

$$t_{(a,b)}(C) \neq C.$$

Damit folgt, dass

$$t_{(a,b)}(C) = A$$

gilt, weil A und C die einzigen Punkte sind, an denen sich sieben Kanten treffen. Daraus folgt, dass

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Wird nun diese Translation auf den Punkt A angewendet, dann gilt

$$t_{(-1,1)}(A) = X.$$

Dies stellt einen Widerspruch dar, weil sich in X nur sechs Kanten treffen. Damit ist gezeigt, dass es keine Translation gibt, die die gegebene Parkettierung auf sich selbst abbildet. Also ist bewiesen, dass die dargestellte Parkettierung nicht-periodisch ist. \square

Nun wird der letzte – und der für diese Arbeit interessanteste – Parkettierungstyp eingeführt: Die aperiodische Parkettierung. Anschließend wird kurz ein bekanntes Beispiel vorgestellt, das durchaus sehr ästhetisch und erwähnenswert ist.

Definition 2.2.6: Eine Menge F an Fliesen wird **aperiodisch** genannt, falls Kopien dieser Fliesen aus F die Ebene parkettieren, jede Parkettierung jedoch nicht-periodisch ist. Das bedeutet, dass, egal wie die Ebene mit ihnen parkettiert wird, die Parkettierung nie eine Translationssymmetrie aufweisen wird.

Bemerkung: Um einen Zusammenhang mit Definition 2.2.2 herzustellen, wird folgendes angemerkt (nach Grünbaum und Shephard, vgl. [GS, Satz 3.7.1]): Wenn eine Menge von Fliesen F eine Parkettierung P zulässt, die nur *eine* Translationssymmetrie besitzt, dann lässt die Menge F auch eine Parkettierung Q zu, die periodisch ist.

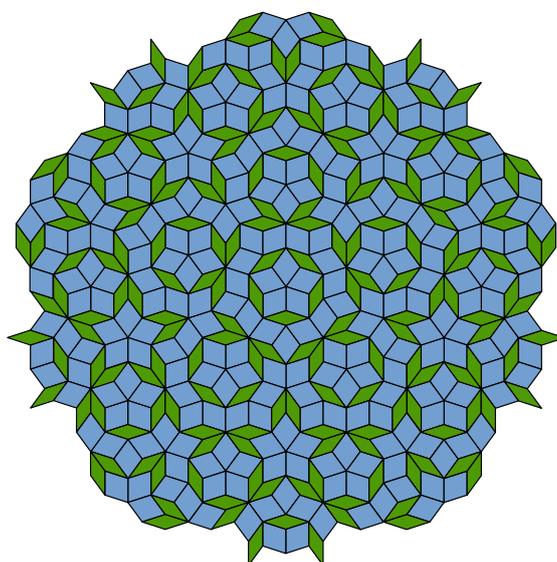


Abbildung 10: Ausschnitt einer Penrose-Parkettierung mit Rauten als Beispiel für eine aperiodische Parkettierung. (Zuletzt aufgerufen am 21.12.2023 unter [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_\(Rhombi\).svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Penrose_Tiling_(Rhombi).svg).)

In Abbildung 10 ist eine von mehreren Penrose-Parkettierungen ausschnittsweise dargestellt. Hier werden als Fliesen 36° - 144° -Rauten (grün dargestellt) und 72° - 108° -Rauten (blau dargestellt) zur aperiodischen Parkettierung der Ebene verwendet.

Für manche Parkettierungen, auch für diese, gelten bestimmte Bedingungen, wie Fliesen aneinandergelegt werden dürfen. Solche **Anlegebedingungen** (engl. *matching rules*) können durch farbige Kreisbögen oder eine Modifizierung der Kanten (ähnlich wie in Abb. 8) vorgenommen werden, welche beim Aneinanderlegen entsprechend berücksich-

tigt werden müssen. Eine Möglichkeit die benötigten Anlegebedingungen, für die hier verwendeten Rauten darzustellen, ist in Abbildung 11 zu sehen.



Abbildung 11: Darstellung der verwendeten Fliesen, d. h. der 36° - 144° -Rauten und 72° - 108° -Rauten, mit eingezeichneten Anlegebedingungen für die oben dargestellte Penrose-Parkettierung. (Darstellung von Strick, vgl. [HKS], S. 9.)

Aus ihnen ergibt sich die aperiodische Parkettierung, deren Entstehung in Abbildung 12 „schrittweise“ mit eingezeichneten Anlegebedingungen dargestellt ist.

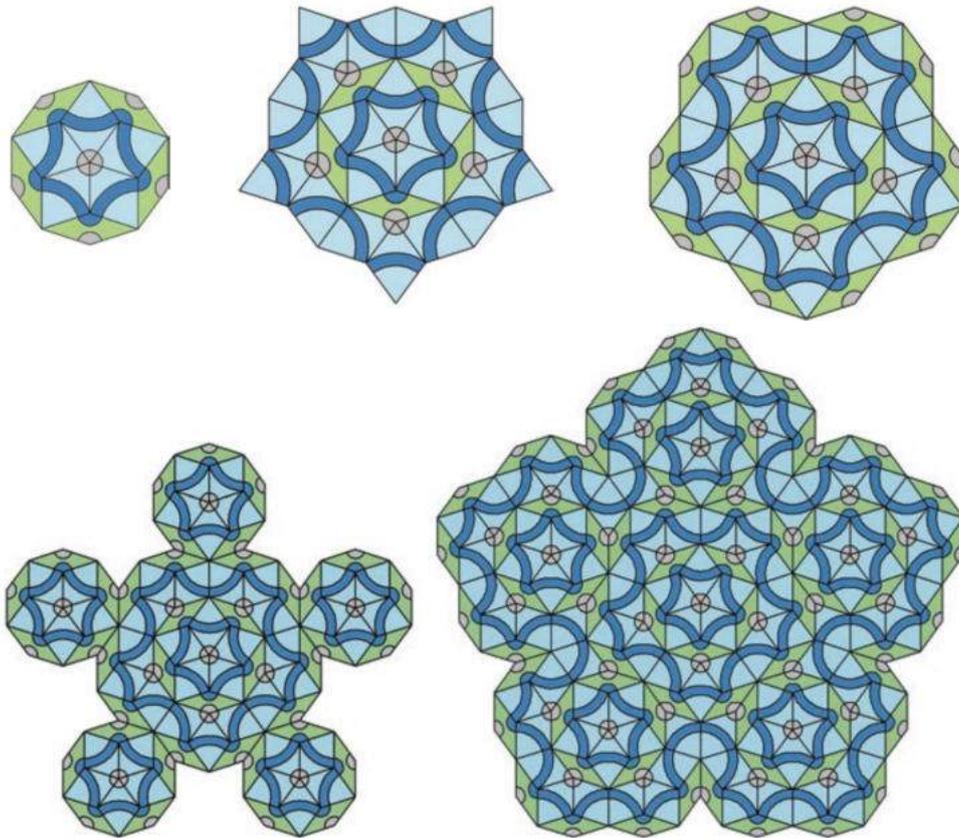


Abbildung 12: Ausschnitt einer Penrose-Parkettierung mit Rauten und eingezeichneten Anlegebedingungen. (Darstellung von Strick, vgl. [HKS], S. 9 f.)

„Die gemäß den Anlegeregeln entstandenen Penrose-Parkettierungen haben eine wunderschöne fünfzählige Symmetrie. Es mag paradox erscheinen, dass man jede Auswahl von

aneinanderliegenden Formen, also einen Ausschnitt aus der Parkettierung der unendlich großen Ebene, beliebig oft in der Parkettierung der Ebene wiederfindet, dass es aber andererseits nicht möglich ist, den ausgewählten Teilbereich allein durch Verschiebung (Translation) mit einem anderen Bereich zur Deckung zu bringen“¹³. Doch genau dies ist hier der Fall und macht eine aperiodische Parkettierung aus.

Weiter wird im Theorieteil dieser Arbeit die im März 2023 veröffentlichte sogenannte „Hut“-Fliese, und wie sie die Ebene parkettiert, im Mittelpunkt stehen.

¹³Wörtliches Zitat von Heinz Klaus Strick aus dem Buch *Mathematik ist wunderschön* (vgl. [HKS], S. 212).

3 Die Aperiodizität des Huts

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die Hut-Fliese, der eigentliche Kern dieser Arbeit, vor- und dargestellt. Daran anschließend werden weitere Begriffe eingeführt, die für die darauffolgenden Aussagen und Eigenschaften benötigt werden. Allgemein muss gezeigt werden, dass der Hut die Ebene parkettiert (vgl. Satz 5). Um darauf aufbauend im letzten Abschnitt damit zu enden, dass der Hut die Ebene sogar aperiodisch parkettiert (vgl. Satz 8).

3.1 Der Hut

Für die Definition des Huts sind weitere Begriffe und Überlegungen angebracht, die nun vorangehen.

Definition 3.1.1: Ein **Drachenviereck** ist ein konvexes¹⁴ Viereck, bei dem jeweils zwei benachbarte Seiten gleich lang sind. Dadurch sind die Diagonalen orthogonal zueinander und mindestens eine Diagonale ist eine Symmetrieachse.

Des Weiteren wird unter einem **Drachen**, ein Drachenviereck mit den Winkeln 90° , 60° , 90° und 120° verstanden (vgl. Abb. 13).

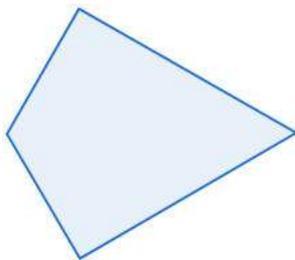


Abbildung 13: Ein Drachenviereck mit den Winkeln 90° - 60° - 90° - 120° . (Eigene Darstellung mittels GeoGebra.)

Wie mit dem Drachen die Ebene parkettiert werden kann, zeigt der nächste Satz.

Satz 2: Der Drache parkettiert die Ebene periodisch.

¹⁴Die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte aus der Menge liegt in der Menge.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, dass ein beliebiges Dreieck die Ebene periodisch parkettiert. Der Beweis erfolgt konstruktiv (vgl. Abb. 14). Betrachte dazu ein beliebiges Dreieck. Durch Anlegen eines isomorphen, um 180° gedrehten Dreiecks ergibt sich ein Parallelogramm. Mehrere solcher Parallelogramme, die aus zwei Dreiecken bestehen, können zu einem unendlich langen Streifen aneinandergelegt werden. Mit unendlich vielen solcher Streifen kann die gesamte Ebene parkettiert werden. Damit ist gezeigt, dass mit Dreiecken die Ebene periodisch parkettiert werden kann.

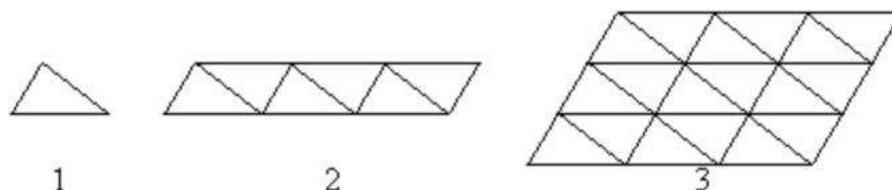


Abbildung 14: Schematische Darstellung des Vorgehens beim konstruktiven Beweis, dass ein beliebiges Dreieck die Ebene periodisch parkettiert. (Quelle: <http://www.mathematische-basteleien.de/parkett12.gif>, zuletzt aufgerufen am 21.12.2023.)

Wird nun eine solche Parkettierung der Ebene mit *regelmäßigen* Dreiecken betrachtet, dann lässt sich zeigen, dass auch der Drache die Ebene periodisch parkettiert. Denn ein regelmäßiges Dreieck kann mit drei Drachen ausgelegt werden, indem jeweils die Ecke des Drachens, deren Winkel 120° beträgt, im Mittelpunkt des Dreiecks liegt und die Drachenseiten mit den Dreieckseiten sowie Teilstrecken der Seitenhalbierenden des Dreiecks übereinstimmen (vgl. Abb. 15).

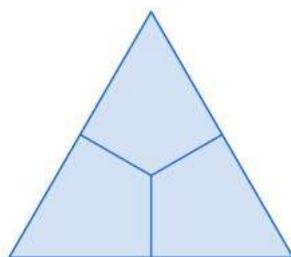


Abbildung 15: Drei Drachen bilden ein regelmäßiges Dreieck. (Eigene Darstellung mittels GeoGebra.)

Ein Ausschnitt dieser periodischen Parkettierung der Ebene mit dem Drachen ist in Abbildung 16 zu sehen. □

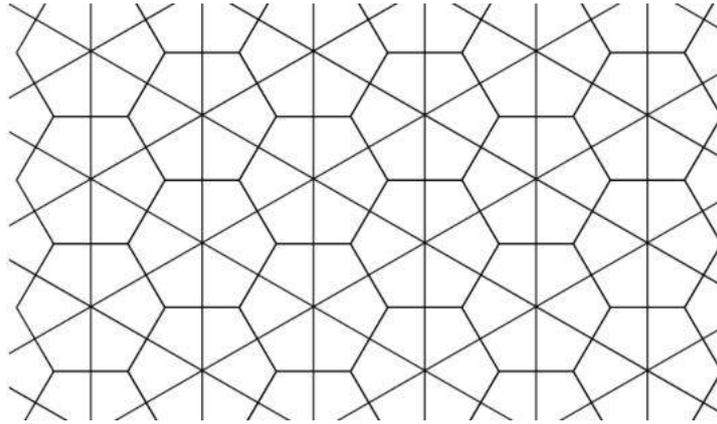


Abbildung 16: Ausschnitt einer kantengenauen periodischen Parkettierung mit dem Drachen. (Ausschnitt einer Abbildung von Weisstein, zuletzt aufgerufen unter https://mathworld.wolfram.com/images/eps-svg/PolykiteGrid_600.svg am 21.12.2023.)

Mit dem Drachen ist also keine aperiodische Parkettierung möglich. Als nächstes soll untersucht werden, wie es mit einer Fliese aussieht, die aus mehreren Drachen besteht. Dazu wird die folgende Definition festgehalten und anschließend ein Beispiel betrachtet.

Definition 3.1.2: Eine **Polyform** ist eine ebenen Figur, die aus mehreren aneinander angrenzenden Kopien einer bestimmten Grundform besteht. Ein **Polykite** ist eine Polyform, deren Grundform der Drachen ist.

Eine Zusammenfassung der gebräuchlichen Namen der Polyformen mit ihren jeweiligen Grundformen kann bei MathWorld¹⁵ eingesehen werden.

Beispiel 3.1.3: Der in Abbildung 17 dargestellte Polykite lässt keine Parkettierung der Ebene zu.

Beweis: An der markierten Stelle (rosa Kreuz) passt keine weitere Fliese in die Lücke. In die Lücke müsste eine Ecke mit einem Winkel von 60° angelegt werden. Die betrachtete Fliese besitzt allerdings keine Ecke mit diesem Winkel. Somit können Kopien dieser Fliese nicht lückenlos aneinander gelegt werden, um die Ebene zu parkettieren. \square

¹⁵Weisstein, Eric W. „Polyform.“ From MathWorld – A Wolfram Web Resource <https://mathworld.wolfram.com/Polyform.html>, zuletzt aufgerufen am 21.12.2023.

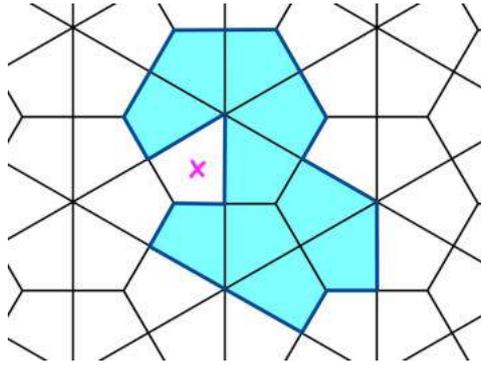


Abbildung 17: Darstellung eines Polykites, der die Ebene *nicht* parkettiert. (Eigene Darstellung unter Verwendung des Gitters von MathWorld aus Abb. 16.)

Bemerkung: Je nach Form des Polykites kann eine Ebene parkettiert oder nicht parkettiert werden. Der einzelne Drache, auch Monokite genannt, aus Abbildung 13 parkettiert die Ebene periodisch. Der Polykite aus Abbildung 17 parkettiert die Ebene gar nicht. Erstrebenswert wäre es, einen Polykite zu finden, der die Ebene parkettiert, aber nicht periodisch.

Als nächstes wird der „Hut“ definiert und dargestellt. In einigen Artikeln ist er so definiert, dass die Eigenschaft *ein Einstein zu sein*¹⁶ bereits zur Definition gehört. Darauf wird hier bewusst verzichtet, da dies in dieser Arbeit gezeigt werden soll.

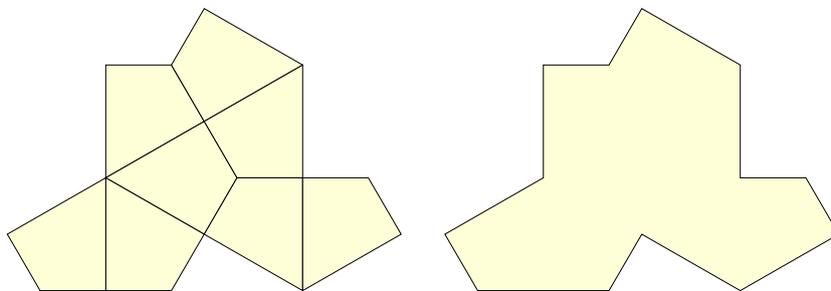


Abbildung 18: Der Hut; links ist der Polykite mit den eingezeichneten Drachen als Grundform dargestellt, rechts ohne. (Darstellung von Weisstein, zuletzt aufgerufen unter <https://mathworld.wolfram.com/HatPolykite.html> am 21.12.2023.)

¹⁶Die Bezeichnung hat nichts mit dem berühmten Physiker ALBERT EINSTEIN zu tun, sondern leitet sich von der Eigenschaft ab, dass nur *ein* Stein benötigt wird, um mit Kopien dieser Fliese die Ebene aperiodisch zu parkettieren. Dabei sind auch gespiegelte Fliesenkopien zulässig, sozusagen die Verwendung der „Rückseite“ des Steins.

Definition 3.1.4: Der **Hut** ist ein Polykite, der in Abbildung 18 dargestellt ist. Es handelt sich um ein Dreizehneck, das aus der Vereinigung acht gleicher Drachen besteht.

Um zu zeigen, dass der Hut allgemein die Ebene parkettiert, werden die sogenannten Metafliesen definiert. Mithilfe eines Substitutionssystems wird später bewiesen, dass die Metafliesen die Ebene parkettieren und somit auch der Hut.

3.2 Metafliesen

Definition 3.2.1: Eine **Metafliese** ist eine endliche Menge an Hüten, die in der Parkettierung aneinander angrenzen und eine (nicht eindeutig) bestimmte Form bilden, welche wiederkehrend in der Parkettierung auftritt. Die folgenden **vier Metafliesentypen** werden definiert: ein unregelmäßiges Sechseck (H), ein gleichseitiges Dreieck (T), ein Parallelogramm (P) und ein fünfeckiges Triskelionbein (F) (vgl. Abb. 19). Zu beachten ist, dass die Metafliesen nur rotiert, nicht gespiegelt werden dürfen.

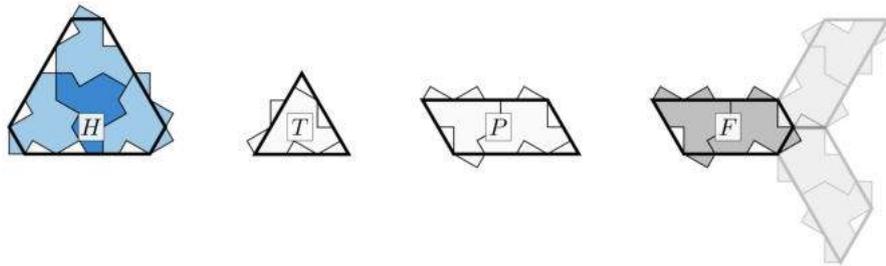


Abbildung 19: Die Metafliesen H , T , P und F wurden konstruiert, indem die Ränder der vereinigten Hüte vereinfacht worden sind. (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 13.)

Bemerkung: Die Formen der Metafliesen sind nicht willkürlich festgelegt, sondern können aus der Betrachtung eines (computergenerierten) Fliesenfelds, das auf eine bestimmte Weise eingefärbt wurde, abgeleitet werden (nach [SMKGS]). In Abbildung 20 ist ein solches Fliesenfeld zu sehen.

Alle reflektierten Hüte sind dunkelblau und die drei direkt an einen reflektierten Hut angrenzenden Hüte sind hellblau dargestellt. Die Vereinigung dieser vier Hüte (dunkel- und hellblau) wurde umrandet. Durch diese Einfärbung und Umrandung ist erkennbar, dass

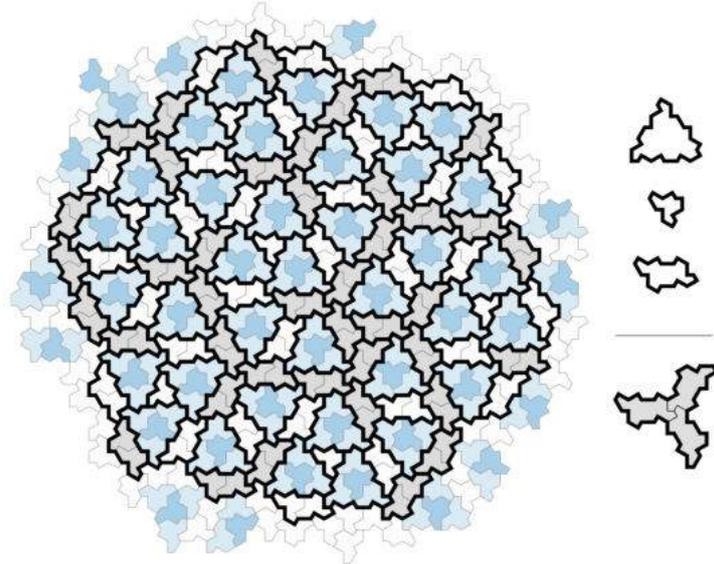


Abbildung 20: Darstellung eines eingefärbten Fliesenfelds, aus dem die Formen der Metafliesen abgeleitet werden können. Rechts daneben sind (einzeln) die Anordnungen der Hüte dargestellt, die (von oben nach unten) die H -, T -, P - und F -Metafliesen bilden. (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 12.)

diese Form innerhalb des Felds wiederkehrend auftritt und sich dabei nicht überlappt. Diese Form ist die oben definierte Metafliese H . Auch die verbleibenden Hut-Fliesen bilden wiederkehrende Formen. Zum einen schließen drei H -Metafliesen, dort wo sie aneinandergrenzen, eine einzelne Fliese ein, die als T -Metafliese definiert wird und somit nur aus einem Hut besteht. Zum anderen bilden die übrigen Fliesen Formen aus zwei Hüten, die annähernd parallelogrammförmig sind. Diese Parallelogrammformen erscheinen in zwei Varianten, abhängig von der Anordnung um sie herum. In der ersten Variante, in Abbildung 20 (links) weiß gefärbt, ist das Parallelogramm von zwei H -Metafliesen umgeben, die an seinen längsten Kanten anliegen. Dies entspricht der Metafliese P . In der zweiten Variante, grau gefärbt, ist das Parallelogramm zusammen mit zwei rotierten Kopien Teil einer dreiarmligen Propellerform, die aus sechs Hüten besteht und *Triskelion* genannt wird. Ein solches Triskelion ist unten rechts in Abbildung 20 dargestellt. Damit sich die zugehörige Metafliese von der P -Metafliese unterscheidet, wird ihre Form etwas angepasst. Dies geschieht, indem eine dreieckige Fläche aus jedem Parallelogramm, das mit dem Bein eines Triskelions assoziiert wird, entfernt wird. Dies ergibt dann die Metafliese F .

Die Formen der Metafliesen sind nur vereinfacht dargestellt. Die ihnen zugrundeliegenden Hütte bestimmen, wie sie aneinander angelegt werden können. Um dies angemessen zu berücksichtigen, werden zwei verschiedene Darstellungen eingeführt.

Definition 3.2.2: Die **Anlegebedingungen** der Metafliesen (aus Def. 3.2.1) können – wie in Abbildung 21 zu sehen – durch eine Unterteilung ihrer Seiten in Strecken, die mit verschiedenen Buchstaben sowie jeweils einem Plus oder Minus beschriftet sind, dargestellt werden. Gleiche Buchstaben und unterschiedliche Vorzeichen zeigen an, welche Seiten aneinandergelegt werden können.

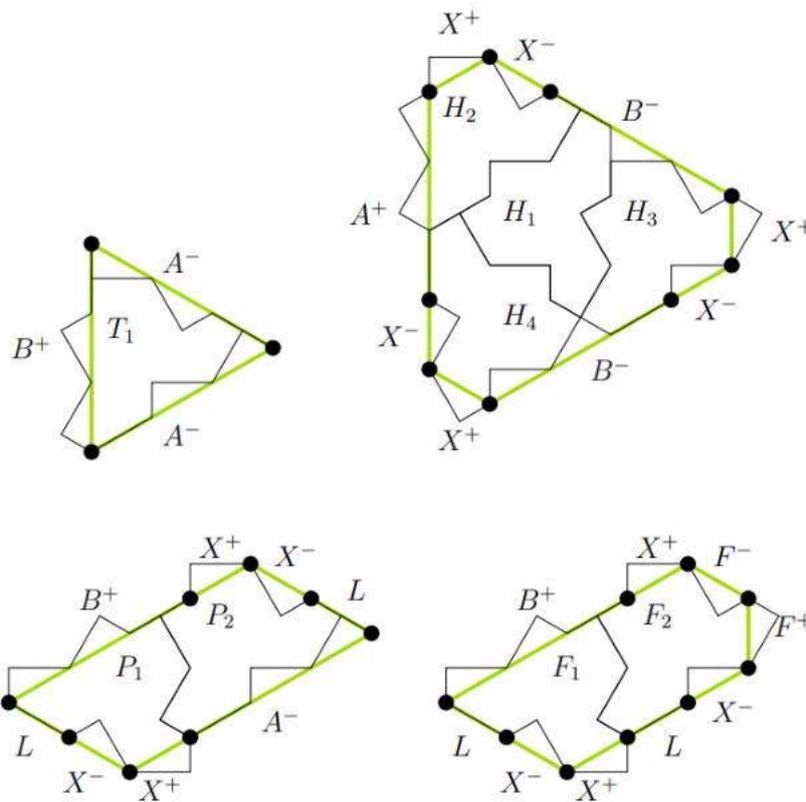


Abbildung 21: Darstellung der Metafliesen T , H , P und F mit ihren jeweiligen Anlegebedingungen. (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 25.)

Die Veranschaulichung der Metafliesen mit ihren Anlegebedingungen kann auch mit farbigen Symbolen umgesetzt werden, um in Abbildungen die Darstellung zu vereinfachen.

Definition 3.2.3: Die Seiten der vier Metafliesen können mit verschiedenen Farben und Symbolen – wie in Abbildung 22 zu sehen – markiert werden. Dadurch werden ihre **Anlegebedingungen** grafisch definiert.

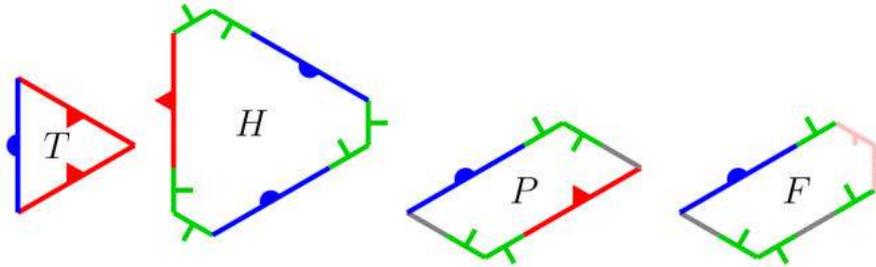


Abbildung 22: Darstellung der Metafliesen T , H , P und F mit ihren jeweiligen Anlegebedingungen. (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 32.)

Bemerkung: Zu beachten ist, dass die roten gleichseitigen Dreiecke beziehungsweise die blauen Halbkreise an den Seiten der H -Metafliese genau entgegengesetzt ausgerichtet sind im Vergleich zu denen der anderen Metafliesen, also bei T , P und F . Zwei Metafliesen können nur aneinander angrenzen, wenn ihre Seiten die gleiche Farbe aufweisen und ihre Symbole in verschiedene Richtungen zeigen. Die Symbole müssen also bildlich durch das Anlegen „zur Deckung“ gebracht werden. Dadurch können beispielsweise keine zwei T -Metafliesen aneinander angrenzen, da hier alle roten gleichseitigen Dreiecke nach innen gerichtet sind. An eine T -Metafliese kann lediglich die H -Metafliese (an alle drei Seiten) angelegt werden. Außerdem ist zu beachten, dass die Metafliesen weiterhin nicht gespiegelt, sondern nur rotiert werden dürfen.

Diese Metafliesen sind der Startpunkt der Definition eines Substitutionssystem, das iteriert werden kann, um ein Feld aus Hüten beliebiger Größe zu erhalten. Die Substitutionsregeln betreffen die Hüte jedoch nicht direkt.

3.3 Das Substitutionssystem

In diesem Abschnitt wird ein Substitutionssystem eingeführt, das die Metafliesen zu größeren Formen zusammenfasst. Hierfür wird der nachfolgende Begriff verwendet.

Definition 3.3.1: Eine **Superfliese** ist eine Menge aneinander angrenzender Metafliesen, die eine größere, kombinatorisch äquivalente¹⁷ Form bilden.

Satz 3: Es existieren die Superfliesen H' , T' , P' und F' , sodass deren Anlegebedingungen untereinander den Anlegebedingungen zwischen den Metafliesen H , T , P und F gleichen.

Beweis: Um eindeutigere Formen und Grenzen der Superfliesen zu erhalten, empfiehlt es sich die P - und die F -Metafliesen – wie in Abbildung 23 dargestellt – zu teilen.

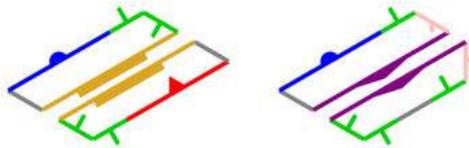


Abbildung 23: Darstellung der jeweils geteilten Metafliesen P und F . (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 33.)

Durch diese Halbierung ergeben sich die nachfolgend abgebildeten Superfliesen T' (vgl. Abb. 24), H' (vgl. Abb. 25), P' (vgl. Abb. 26) und F' (vgl. Abb. 27) mit den entsprechenden Anlegebedingungen. Die verschiedenen Superfliesen sind jeweils mit der (symmetrisch) zugehörigen Metafliese dargestellt.

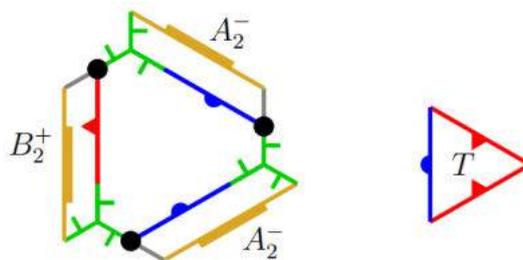


Abbildung 24: Die Superfliese T' neben der zugehörigen Metafliese T . (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 40.)

¹⁷Durch die kombinatorische Äquivalenz ergibt sich, dass die Superfliesen wie vergrößerte Kopien der Metafliesen verwendet werden können.

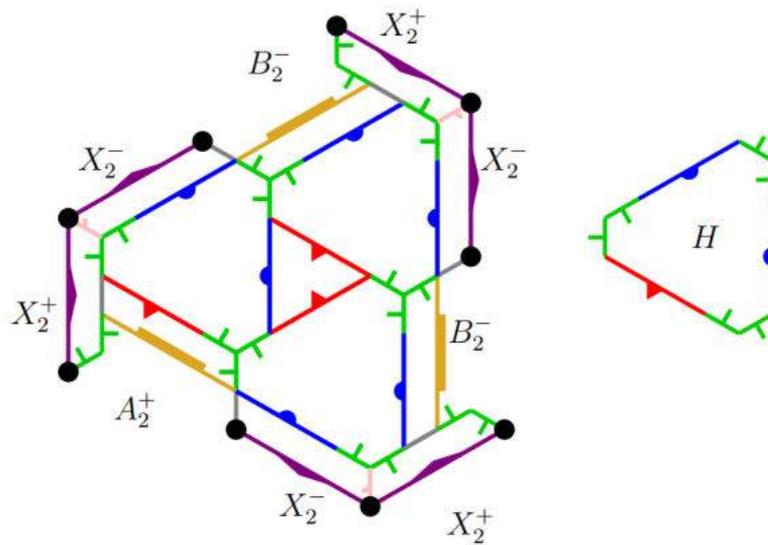


Abbildung 25: Die Superfließ H' neben der zugehörigen Metafließ H . (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 41.)

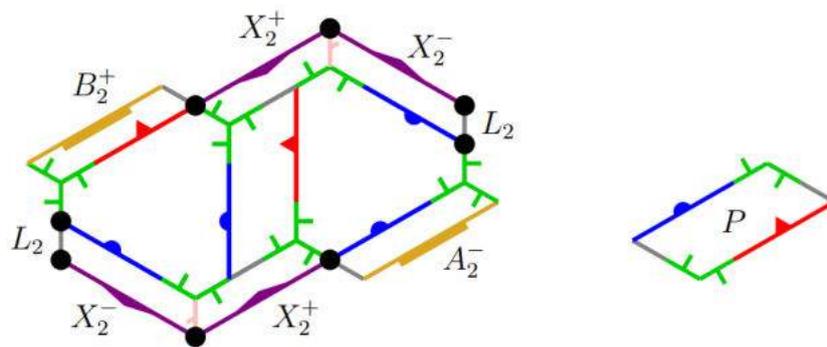


Abbildung 26: Die Superfließ P' neben der zugehörigen Metafließ P . (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 41.)

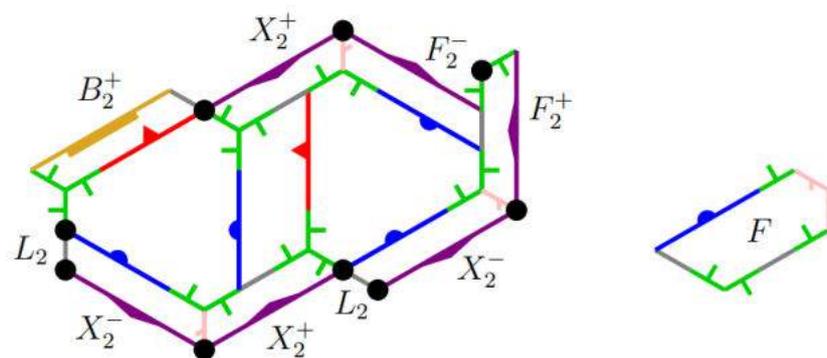


Abbildung 27: Die Superfließ F' neben der zugehörigen Metafließ F . (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 41.)

Durch die vorangegangenen Darstellungen ist die Existenz der Superfliesen gezeigt.

Jede einzelne Superfliese verhält sich kombinatorisch¹⁸ wie eine der Metafliesen (mit den farblich markierten und beschrifteten Kantenabschnitten für die Anlegebedingungen) in einer Parkettierung mit den anderen Superfliesen. Es kann gezeigt werden, dass die Superfliesen nur in Übereinstimmung mit den Anlegebedingungen aneinander angrenzen (vgl. [SMKGS], S. 42 f.).

Um zu beweisen, dass die Superfliesen vollkommen kombinatorisch äquivalent zu den ursprünglichen Metafliesen sind, muss überprüft werden, dass an den Eckpunkten die gleichen Kombinationsmöglichkeiten von Superfliesen ineinander passen, genau so wie die entsprechenden Kombinationen von Metafliesen an den Eckpunkten ineinander passen. In den Abbildungen 24 bis 27 ist jede Superfliese gemeinsam mit einer Kopie ihrer (symmetrisch) zugehörigen Metafliese in der entsprechenden Orientierung dargestellt. Durch einen Vergleich der Winkel, den (direkt) benachbarte Kanten sowohl der Metafliesen als auch der Superfliesen einschließen, ergibt sich, dass diese identisch sind und somit die gewünschte Aussage gilt (vgl. [SMKGS], S. 43). Also existieren Superfliesen, die kombinatorisch äquivalent zu den Metafliesen sind. \square

Bemerkung: Auf dieser Grundlage lassen sich detailliertere Regeln aufstellen wie die Metafliesen bzw. die halbierten Metafliesen genau einer der verschiedenen Superfliesen zugeordnet werden und aneinander angelegt werden dürfen. Diese Regeln können in der Veröffentlichung von Smith et al. (vgl. [SMKGS], S. 40 ff.) nachgelesen werden. Dabei sind alle Symmetrien der ursprünglichen Parkettierung ebenso Symmetrien der Parkettierung mit Superfliesen (diese Eigenschaft folgt direkt aus den Regeln, die keine beliebigen Möglichkeiten beinhalten, die die Symmetrie verletzen könnten).

Um ein zielführendes Substitutionssystem zu etablieren, wird der nachfolgende Satz gezeigt.

Satz 4: In jeder beliebigen Parkettierung durch die vier Metafliesen lassen sich die Metafliesen zu kombinatorisch äquivalenten Superfliesen zusammenfassen und bilden dadurch ein Substitutionssystem.

¹⁸Kombinatorisch bedeutet alle Kombinationen von Elementen einer Menge berücksichtigend; hier heißt es, dass sich die Superfliesen untereinander genauso kombinieren lassen wie die Metafliesen.

Beweis: Um dies zu beweisen, werden viele Fallunterscheidungen betrachtet, wie die Metafliesen aneinander gelegt werden können. Die Abbildungen hierzu sind wie folgt zu interpretieren (nach Smith et al., vgl. [SMKGS]).

- Die unnummerierten Fliesen legen den Fall fest, der betrachtet wird.
- Die nummerierten Fliesen müssen in der Reihenfolge ihrer Nummerierung aufgrund der Konstruktion erzwingenermaßen so angelegt werden.
- Falls es nötig ist, einen Fall in mehrere Fälle zu unterteilen, dann ist die Stelle, an der mehrere Möglichkeiten für eine Fliese betrachtet werden müssen, durch einen gefüllten schwarzen Kreis markiert. Danach folgen einzelne Abbildungen für jeden Fall. Bei diesen sind die zuvor erzwungenen Fliesen nun unnummeriert, aber neue erzwungene Fliesen, die nur so gelegt werden können, nummeriert.

Bevor die erlaubten Möglichkeiten, wie die Metafliesen aneinander gelegt werden können, untersucht werden, wird zuvor noch eine Anordnung betrachtet, die nicht zielführend ist. In Abbildung 28 ist eine Konstellation dargestellt, die häufig in den Fallunterscheidun-

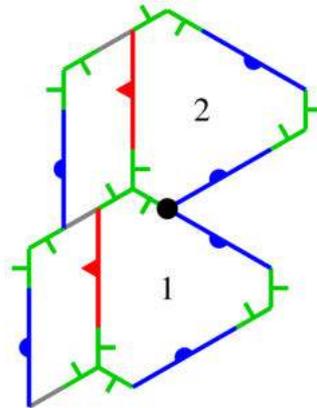


Abbildung 28: Darstellung einer allgemein unzulässigen Anordnung, die als PP bezeichnet wird. (Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 34.)

gen auftaucht und im Folgenden PP genannt wird. Die zwei aneinander angrenzenden Kopien von P , die gleich ausgerichtet sind, erzeugen einen Widerspruch, da keine weitere Fliese am markierten Punkt (schwarzer Kreis) angelegt werden kann. Aufgrund dieser Beobachtung werden nur solche Fliesen als **erzwungen** bezeichnet, die als einzige an die gegebene Stelle übereinstimmend mit den Anlegebedingungen angelegt werden können, und solche, deren einzige Alternative die Platzierung einer P -Fliese wäre, sodass eine PP -Anordnung entstehen würde.

Beispielhaft werden nun einige der verschiedenen Fallunterscheidungen dargestellt. Speziell werden die Anordnungen betrachtet, die eine T -Metafliese beinhalten. Bei den Abbildungen ist zu beachten, dass die jeweiligen Metafliesen (H , T , P und F) zueinander isometrisch sind, auch falls sie in den verschiedenen Abbildungen unterschiedlich groß dargestellt sein sollten. Eine unterschiedlich große Darstellung ist nicht beabsichtigt, dies ergibt sich lediglich aufgrund der Einbindung der Bilder, die nicht selbst erstellt sind, sondern aus der Veröffentlichung von Smith et al. (vgl. [SMKGS]) stammen.

T beinhaltende Fälle: Um an eine T -Metafliese andere Fliesen anzulegen, müssen ihre Anlegebedingungen berücksichtigt werden. Eine T -Metafliese besitzt zwei rote Kanten, an die nur die rote Kante einer H -Metafliese angrenzen kann, während an die blaue Kante von T eine der beiden blauen Kanten von H angrenzen kann. Deshalb gibt es zwei Fälle für die Anordnung um eine T -Metafliese, die im Folgenden als $T1$ und $T2$ bezeichnet werden (vgl. Abb. 29). Wie in den Beschriftungen dieser und nachfolgender Abbildungen erklärt, zeigt eine Reihe von Schlussfolgerungen, dass in einer Parkettierung jede T -Metafliese nur in der Anordnung des Falls $T1PF$ (vgl. Abb. 35) auftreten kann (vgl. [SMKGS]).

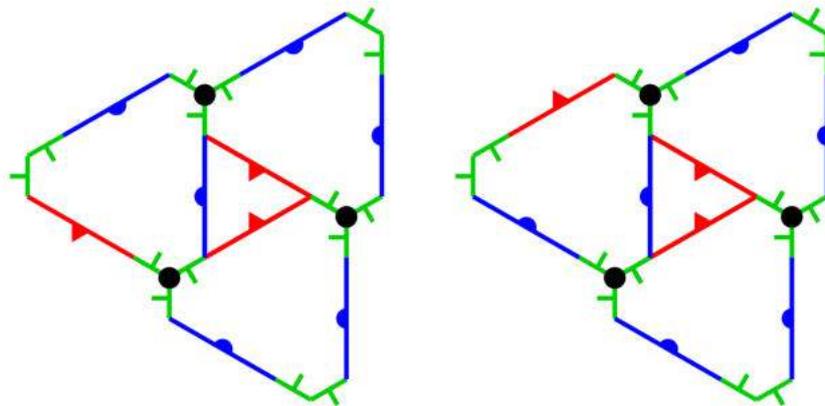


Abbildung 29: Links Fall $T1$, rechts $T2$ (aus [SMKGS], S. 34). Betrachte jeweils die drei markierten Stellen bei $T1$ und $T2$. An jede kann entweder P oder H angelegt werden. An den Seiten der Figur mit zwei blauen Kanten darf am markierten Punkt kein H angelegt werden, weil dies zu einem 60° Winkel zwischen zwei blauen Kanten führen würde, sodass keine weitere Fliese angelegt werden kann. Also muss für diese beiden Seiten jeweils ein P an die markierte Stelle angelegt werden. Wohingegen an der dritten Seite entweder ein P oder ein H angelegt werden kann. Letzteres nur, falls H so orientiert ist, dass ein 60° Winkel zwischen zwei blauen Kanten vermieden wird. In den nachfolgenden Fallunterscheidungen wird, wenn eine solche Situation erneut auftaucht, ohne weiteren Kommentar nur die erzwungene Orientierung von H betrachtet. Diese Anlegemöglichkeiten führen zu vier Fällen, die mit $T1P$ (Abb. 30), $T2P$ (Abb. 31), $T1H$ (Abb. 32) und $T2H$ (Abb. 33) bezeichnet werden. Diese werden fortgeführt, indem weitere erzwungene Fliesen in jedem dieser Fälle ergänzt werden.

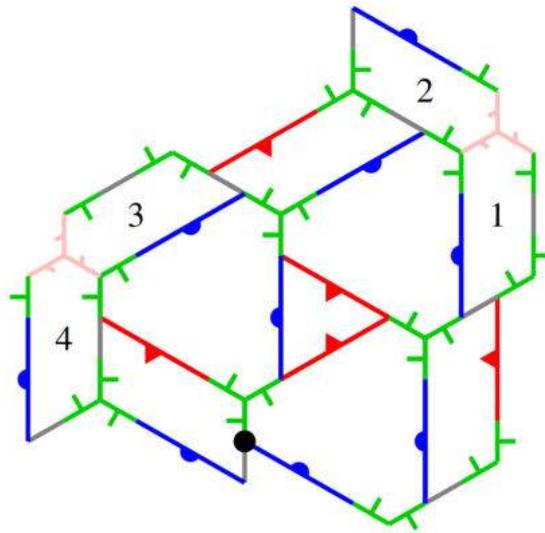


Abbildung 30: Fall $T1P$ (aus [SMKGS], S. 35). An der markierten Stelle kann ein P oder ein F angelegt werden. Dies führt zu den Fällen, die mit $T1PP$ (Abb. 34) und $T1PF$ (Abb. 35) bezeichnet werden.

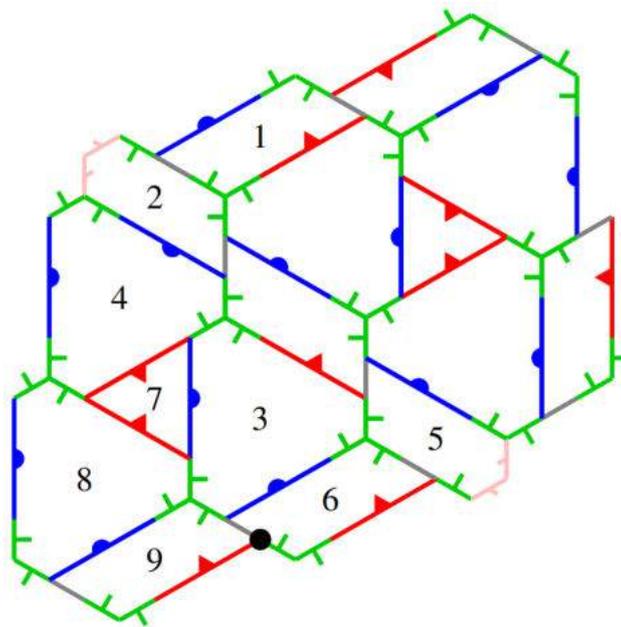


Abbildung 31: Fall $T2P$ (aus [SMKGS], S. 35). Dieser Fall wird **ausgeschlossen**, da PP an der markierten Stelle auftritt.

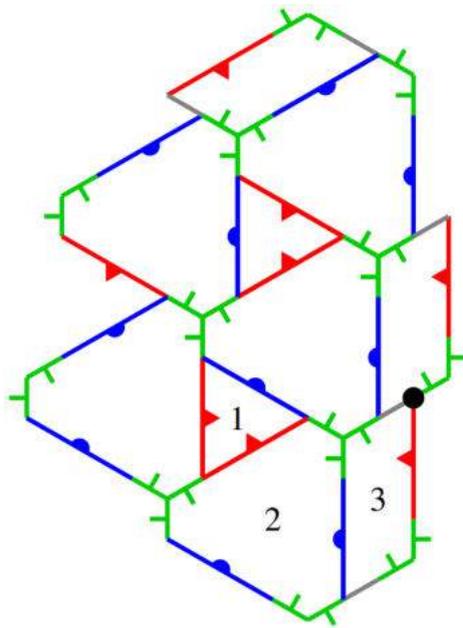


Abbildung 32: Fall $T1H$ (aus [SMKGS], S. 36). Dieser Fall wird **ausgeschlossen**, da PP an der markierten Stelle auftritt.

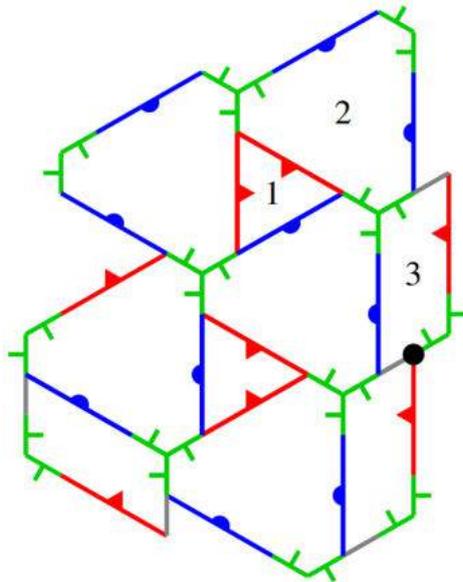


Abbildung 33: Fall $T2H$ (aus [SMKGS], S. 36). Dieser Fall wird **ausgeschlossen**, da PP an der markierten Stelle auftritt.

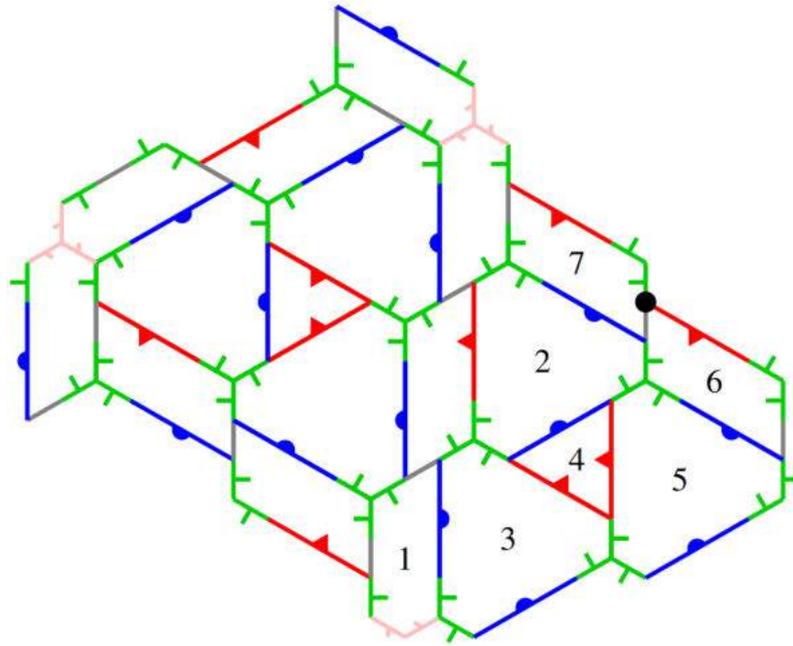


Abbildung 34: Fall $T1PP$ (aus [SMKGS], S. 37). Dieser Fall wird **ausgeschlossen**, da PP an der markierten Stelle auftritt.

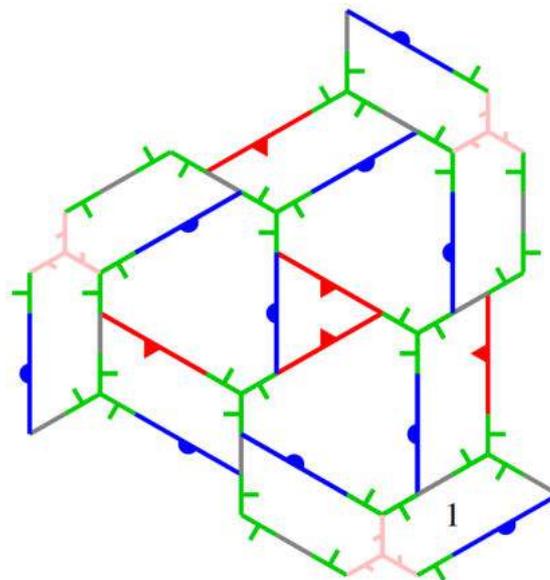


Abbildung 35: Fall $T1PF$ (aus [SMKGS], S. 37). Jede T -Metafliese in einer Parkettierung muss in dieser Anordnung auftreten. Dies ist die einzige zulässige Anordnung, die sich aufgrund der Anlegebedingungen ergibt. Eine Halbierung der P und F -Metafliesen führt zu der Superfliese H' (vgl. Abb. 25). Diese verhält sich kombinatorisch wie H (mit den angegebenen markierten Kantenabschnitten für die Anlegebedingungen) in einer Parkettierung mit den anderen Superfliesen T' , P' und F' .

H beinhaltende Fälle: Für die H -Metafliesen kann analog vorgegangen werden. Nacheinander können alle Fälle mit H , die nicht an ein T angrenzen¹⁹, betrachtet, fortgeführt und ggf. ausgeschlossen werden (vgl. [SMKGS], S. 38 ff.). Dadurch ergeben sich drei mögliche Fälle, wie eine H -Metafliese innerhalb einer Parkettierung mit Hüten auftreten kann. Diese Fälle können, nachdem die enthaltenen P - und F -Metafliesen halbiert wurden, als verschiedene Superfliesen (T' , P' oder F') aufgefasst werden. Denn jeder einzelne Fall verhält sich kombinatorisch wie eine der Metafliesen (mit den Kantenabschnitten, die für übereinstimmende Anlegebedingungen markiert sind) in einer Parkettierung mit den anderen Superfliesen.

Im Beweis von Satz 3 wurde bereits gezeigt, dass die Superfliesen kombinatorisch äquivalent zu den Metafliesen sind. Daher gelten die vorangegangenen Argumente induktiv und gewährleisten, dass die Zusammensetzung von Fliesen zu Superfliesen n -mal für alle $n \in \mathbb{N}$ angewendet werden kann. Da der Radius einer Scheibe, die in den Superfliesen enthalten ist, mit n gegen unendlich geht (und dies nicht davon abhängt, wie die Halbierung der Superfliesen geometrisch definiert ist) und die Parkettierung mit Superfliesen alle Symmetrien der ursprünglichen Parkettierung besitzt, folgt, dass die ursprüngliche Parkettierung keine Translationssymmetrie besitzen kann. Außerdem impliziert die Substitutionsstruktur, dass die Metafliesen beliebig große endliche Bereiche der Ebene parkettieren und somit auch die gesamte Ebene. \square

Beispiel 3.3.2: In Abbildung 36 können die Superfliesen von H betrachtet werden, die durch diesen Iterationsprozess entstehen, und das Feld an Hüten, das jede von ihnen enthält. Diese Felder bilden eine Folge, deren Radius unbegrenzt wächst, wobei jedes Feld eine Teilmenge seines Nachfolgers ist. Auf jeder Ebene überschneiden sich die Fliesen teilweise mit den Rändern ihrer Superfliesen. Überschneidungen sind hier akzeptabel, da sich die Superfliesen mit benachbarten Superfliesen, mit der gleichen Konfiguration kleinerer Fliesen an ihren Rändern, treffen. (vgl. [SMKGS])

¹⁹Die Fälle, in denen H und T aneinander angrenzen, wurden bereits in den Fällen, die T beinhalten, betrachtet.

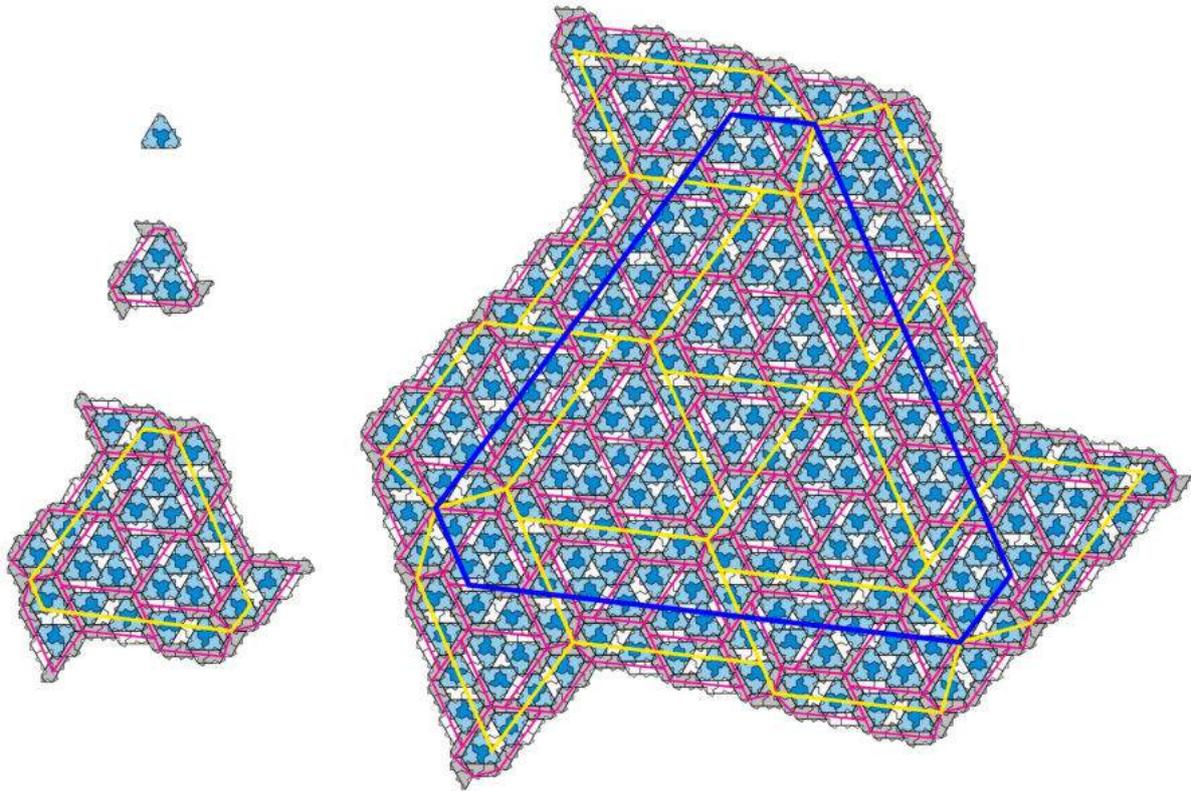


Abbildung 36: Die ersten vier Iterationen der H Metafliese und ihrer Superfliese H' .
(Darstellung von Smith et al., vgl. [SMKGS], S. 15.)

3.4 Parkettierungen mit der Hut-Fliese

Durch diesen beliebig oft fortgesetzten Iterationsprozess ergibt sich die nachfolgende wichtige Aussage über Parkettierungen mit der Hut-Fliese.

Satz 5: Der Hut parkettiert die Ebene.

Beweis: Da (wie im Beweis von Satz 4 gezeigt) die Metafliesen die Ebene parkettieren und diese aus Hüten bestehen, parkettiert auch der Hut die Ebene. \square

Nachdem gezeigt wurde, dass der Hut die Ebene parkettiert, kann in weiteren Schritten gezeigt werden, dass er dies zwingend nicht-periodisch tut. Dazu werden die beiden nachfolgenden Sätze benötigt.

Satz 6: Die Metafliesen lassen nur aperiodische Parkettierungen zu.

Satz 7: Jede Parkettierung durch den Hut-Polykite kann in die in Abbildung 21 gezeigten Metafliesen unterteilt werden (oder in Spiegelungen davon, aber keine Kombination von reflektierten und nicht-reflektierten Metafliesen), die die gegebenen Anlegebedingungen erfüllen. Dabei weist die resultierende Parkettierung durch Metafliesen dieselben Symmetrien auf wie die ursprüngliche Parkettierung durch den Hut-Polykite.

Bemerkung: Der vorangegangene Satz ist zielführend, um die Aperiodizität des Huts zu beweisen. Es ist leichter, Parkettierungen mit den Metafliesen zu betrachten, da über diese durch das im Abschnitt 3.3 eingeführte Substitutionssystem Aussagen über Parkettierungen der Ebene \mathbb{R}^2 getroffen werden können. Dazu muss jedoch gegeben sein, dass Parkettierungen mit den Metafliesen die gleichen Symmetrien aufweisen wie Parkettierungen mit der Hut-Fliese. Eine beliebige Parkettierung mit der Hut-Fliese muss also immer als eine Parkettierung mit Metafliesen darstellbar sein und dabei die gleichen Symmetrien besitzen. Nur dann kann die Aussage, dass die Metafliesen die Ebene aperiodisch parkettieren auch auf die Hut-Fliese übertragen werden. Wenn die Parkettierung mit den Metafliesen weniger Symmetrien als die ursprüngliche Parkettierung mit der Hut-Fliese besitzen würde, dann wäre dies nicht möglich. Durch das Substitutionssystem aus Abschnitt 3.3 ist gegeben, dass die Superfliesen die gleichen Symmetrien aufweisen wie die Metafliesen. Wenn dies nicht gegeben wäre, könnte es vorkommen, dass die Substitution nicht in alle Richtungen erfolgt und somit letztendlich nicht die ganze Ebene parkettiert wird.

Um diese beiden Sätze zu zeigen sind viele weitere Betrachtungen und einzelne Beweise nötig (vgl. [SMKGS]), die den Umfang dieser Arbeit übersteigen würden, weshalb an dieser Stelle auf jene verzichtet wird. Aus den drei vorangegangenen Sätzen ergibt sich schließlich die gewünschte abschließende Aussage.

Satz 8: Der Hut parkettiert die Ebene aperiodisch.

Der vollständige Beweis, dass der Hut die Ebene aperiodisch parkettiert, ist in dem Artikel von Smith, Myers, Kaplan und Goodman-Strauss (vgl. [SMKGS]) nachzulesen.

Dort werden gleich zwei mögliche Beweise vorgestellt, um die Aperiodizität des Huts zu zeigen (vgl. [SMKGS], S. 5 f.). Die Autoren zeigen sogar noch mehr. Durch Veränderung der Kantenlänge der Hut-Fliese erhalten sie eine Familie von Einsteinen. Das heißt jede einzelne dieser Fliesen parkettiert die Ebene aperiodisch (vgl. [SMKGS], S. 11 ff.). Dadurch haben Smith et al. nicht nur einen Einstein veröffentlicht, sondern unendlich viele.

4 Anwendungsmöglichkeiten im Schulkontext

Nachfolgend wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie dieses aktuelle und sehr mathematische Thema in den Schulkontext eingebunden und mit Lernenden behandelt werden kann. Das gewählte Vorgehen wird dabei didaktisch begründet.

4.1 Grundidee

Das Thema der Hut-Fliese ist sehr aktuell. Im Rahmen dieser Arbeit wurden in Zusammenarbeit mit dem HEGL („Heidelberg Experimental Geometry Lab“) im Mathematikon aus buntem Acrylglas kleine Hut-Fliesen angefertigt (vgl. Abb. 37). Mit diesen „Puzzle-teilen“ können die Schülerinnen und Schüler selbstständig versuchen Muster zu legen und so praktisch erfahren, dass nur bestimmte Muster, nämlich nicht-periodische, möglich sind. Durch diesen handlungsorientierten Ansatz besitzt die Hut-Fliese das Potential auch leistungsschwache Schülerinnen und Schüler für das Fach Mathematik zu begeistern.



Abbildung 37: Foto des Hut-Puzzles aus Acrylglas, das in Zusammenarbeit mit dem HEGL hergestellt wurde. (Eigene Aufnahme)

In der geplanten Unterrichtseinheit wurde der Fokus auf die Anwendung des EIS-Prinzips gelegt. Gemäß des EIS-Prinzips von J. Bruner lässt sich ein mathematischer Sachverhalt auf drei verschiedene Arten repräsentieren: (E) enaktiv, also durch Handeln; (I) ikonisch, also bildlich; und (S) symbolisch, also verbal oder formal. Idealerweise sollten alle drei Darstellungsformen – enaktiv, ikonisch und symbolisch – genutzt werden, um ein besseres Verständnis für einen mathematischen Sachverhalt zu erreichen. Insbesondere der Transfer zwischen den verschiedenen Darstellungsformen erweist sich als entscheidend. Für Parkettierungen allgemein und insbesondere mit der Hut-Fliese bietet sich der Erkenntnisgewinn durch Handlungen besonders gut an.

Dies soll in einer Unterrichtseinheit für die 5. oder 6. Klasse umgesetzt werden (vgl. Abschnitt 4.2). Der zugehörige Ablaufplan ist beigefügt (vgl. Abschnitt 4.3, Abb. 38).

4.2 Ablauf

Im Bildungsplan des Landes Baden-Württemberg von 2016 steht, dass „die Schülerinnen und Schüler [der 5./ 6. Klasse] Zusammenhänge beschreiben [und insbesondere] Muster (z. B. Zahlenfolgen) erkennen, verbal beschreiben und diese fortsetzen“ können (vgl. [BP]). Dies lässt sich auch durch das Legen und Fortsetzen von lückenlosen Mustern umsetzen.

Die Stunde kann damit begonnen werden, dass die Lehrkraft eine Zahlenfolge wie beispielsweise „3 – 6 – 9 – 12 – ...“ nennt, die die Schülerinnen und Schüler als Dreierreihe fortsetzen. Durch weitere solcher Zahlenfolgen wie beispielsweise „99 – 77 – 55 – ...“ und „15 – 30 – 45 – ...“ wird den Lernenden ein Muster auffallen. Sie erkennen die regelmäßigen Abstände zwischen den Zahlen und sind dadurch in der Lage die Reihe auf gleiche Weise fortzuführen.

In einer anschließenden Stationenarbeit werden in Partner- oder Gruppenarbeit durch entdeckendes Lernen²⁰ Fliesenmuster erkannt, fortgesetzt und beschrieben. Diese Vorgehensweise fördert produktives Üben²¹. Statt stupidem Wiederholen von vorgefertigten Aussagen, können die Lernenden den Lerngegenstand selbst entdecken und ihre eigenen Erfahrungen z. T. haptisch erlangen. Wenn die Lernenden sich mit den Inhalten vertieft auseinandersetzen, kann dadurch ein nachhaltigeres Lernen gelingen.

²⁰Entdeckendes Lernen nach T. Leuders (vgl. [Le]).

²¹Produktives Üben nach T. Leuders (vgl. [Le]).

Für die Stationenarbeit stehen Arbeitsmaterialien zur Verfügung (siehe Abschnitt 4.3). An allen Stationen ist ein quadratisches Feld gegeben, das mit einem bestimmten Fliesentyp – nach Möglichkeit lückenlos – ausgelegt werden soll. An jeder Station wird eine andere Fliesenform untersucht (vgl. Abb. 41 bis 43). Für das Stationenlernen gibt es Pflicht- und Wahl- (vgl. Abb. 39) sowie Zusatzaufgaben (vgl. Abb. 43, unterer Teil) und beiliegende Hilfekärtchen (vgl. Abb. 44 bis 48). Dadurch ist sowohl eine innere als auch eine äußere Differenzierung vorhanden. Die Hilfekärtchen fungieren gleichzeitig als Lösungskärtchen, sodass eine eigenständige Kontrolle für die Lernenden möglich ist. Es bietet sich an, mit quadratischen, rechteckigen, dreieckigen sowie rautenförmigen Mosaikfliesen (neben den Hut-Puzzleteilen) zu arbeiten. Die Lernenden sollen zunächst die viereckigen Grundformen identifizieren und deren zugehörige Eigenschaften beschreiben. Von diesen vier Stationen sollen mindestens zwei bearbeitet werden. Eine weitere Station stellt die Hut-Fliese dar. Diese letzte Station muss von allen Lernenden bearbeitet werden.

An jeder Station bearbeiten die Schülerinnen und Schüler den nachfolgenden Arbeitsauftrag (vgl. Abb. 40).

- (a) Schau die Fliese an und beschreibe, welches Muster sich ergibt, wenn die vorgegebene Fläche ohne Lücken ausgelegt wird.
- (b) Lege die vorgegebene Fläche mit der Fliesenform aus und zeichne das Muster in das vorgesehene Feld auf dem Arbeitsblatt (wähle einen geeigneten Maßstab).
- (c) Beschreibe, welches (wiederkehrende) Muster erkennbar ist. Vergleiche mit deiner Vermutung aus (a).

Für die Stationenarbeit haben die Lernenden insgesamt 20 Minuten Zeit. Gruppen, die früher fertig sind, können sich zusätzlich weitere Formen überlegen, mit denen die Fläche auf gleiche Weise ausgelegt werden kann (z. B. Drachenviereck, Parallelogramm, Trapez, Sechseck). In dieser Zusatzaufgabe kann auch notiert werden, warum bzw. welche bestimmte Formen sich nicht eignen (z. B. Kreis, Achteck).

Dieses gewählte Vorgehen ist sinnvoll, da die Lernenden tatsächlich eine Handlung ausführen und enaktiv die Muster legen. Kombiniert mit der ikonischen Notation der gelegten Muster sowie deren verbalen Beschreibung ergibt sich ein offener Transfer zwischen allen drei Darstellungsebenen nach Bruners „EIS-Prinzip“. Dies führt im Allgemeinen zu einer besseren Vernetzung der Lerninhalte.

Anschließend präsentieren die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse und diskutieren sie in der Klasse. Besonders auffällig sind die Ergebnisse der Hut-Fliese, denn für diese Fliese ergibt sich kein wiederkehrendes Muster.

Die Lehrkraft beschreibt die Besonderheit der Hut-Fliese. Dabei wird der mathematische Aspekt der Aperiodizität didaktisch sehr stark reduziert. Diese Fliesenform kann eine Fläche nur lückenlos bedecken, wenn auch ihre gespiegelte Form verwendet wird. Dann ergibt sich, egal wie mit ihr die Fläche ausgelegt wird, kein wiederkehrendes Muster. Dies gilt für Flächen beliebiger Größe. Mathematiker sagen, dass eine Ebene mit ihr parkettiert werden kann, ohne dass ein periodisches Muster entsteht. Das ist sehr besonders, sodass nach einer solchen „Ein-Stein“-Fliese sehr lange Zeit gesucht wurde. Bis zu ihrer Entdeckung war nicht klar, ob eine solche Fliese überhaupt existiert. Diese besondere dreizehneckige Hut-Fliesenform ergibt sich dadurch, dass acht Drachen auf bestimmte Weise zusammengefügt werden. Manche Menschen sehen in dem Hut auch eher ein zerrissenes T-Shirt.

Dies ist das Minimalziel der Stunde. Falls noch Zeit ist, kann ein Ausblick auf die neuere Entdeckung der Spectre-Fliese gegeben werden. Diese wurde kurz nach der Hut-Fliese veröffentlicht und kommt ohne Verwendung ihrer Rückseite aus. Denn die reflektierte Fliese kann aufgrund der speziellen Form der Spectre-Fliese nicht an diese angelegt werden. Sie wird deshalb auch „Vampir-Fliese“ genannt, weil ihr Spiegelbild, also die gespiegelte Fliesenform, nicht in der Parkettierung vorkommt.²²

Hinweis zur Differenzierung: Falls das Auslegen der Fläche mit den Hut-Fliesen aus Acrylglas zu schwierig ist, kann auch die Bastelvorlage von Herrn Heinz Klaus Strick verwendet werden (siehe Abb. 49 bis 51). Dort sind neben den dicken Randlinien weitere dünne Linien eingezeichnet, die fliesenübergreifend zu Sechsecken zusammengelegt werden können bzw. müssen und somit das Anlegen²³ erleichtern.

4.3 Materialien

²²Siehe zur Spectre-Fliese auch den Artikel von Manon Bischoff auf Spektrum.de unter <https://www.spektrum.de/news/vampir-kachel-loest-den-einstein-ab/2146095> und die (noch nicht begutachtete) Veröffentlichung von Smith, Myers, Kaplan und Goodman-Strauss unter <https://arxiv.org/pdf/2305.17743.pdf> (beide zuletzt aufgerufen am 21.12.2023).

²³Nur durch „korrektes“ Anlegen ist ein Auslegen der Fläche ohne Lücken möglich. Die Hut-Fliesen können auch so aneinander gelegt werden, dass Lücken entstehen, in die keine weitere Hut-Fliese (lückenlos) angelegt werden kann.

Muster mit Fliesen

Ziel der Stunde: Die SuS können Zusammenhänge beschreiben, insbesondere Muster (z. B. Zahlenfolgen) erkennen, verbal beschreiben und diese fortsetzen sowie maßstäbliche Zeichnungen anfertigen, auch mit selbstgewähltem, geeignetem Maßstab. Außerdem können sie geometrische Objekte und Beziehungen identifizieren und beschreiben, insbesondere Vierecke (Quadrat, Rechteck, Raute, Drachenviereck) identifizieren und deren spezielle Eigenschaften beschreiben.

Zeit	Phase	Ablauf	Sozialform/ Methoden	Medien/ Material
5'	EI	Begrüßung, L: „3, 6, 9, 12, ... <i>Setze fort.</i> “, „99, 77, 55, ... <i>Setze fort.</i> “ „ <i>Beschreibt</i> wie er/sie darauf gekommen ist.“ Das Thema der heutigen Stunde ist Muster <i>erkennen</i> , <i>beschreiben</i> und <i>fortsetzen</i> , allerdings nicht für Zahlenreihen, sondern für das Auslegen von Flächen. Eine Fläche mit einem kreativen Fliesenmuster auszulegen, ist nämlich eines der schwierigsten Probleme der Mathematik.	SLG	Ggf. Tafel oder Folie
20'	EA	Vorstellen der Stationen (Aufbau vorab) L: „Wie ihr seht, habe ich euch Mosaiksteine mitgebracht. <i>Identifiziert</i> die Vierecke und <i>beschreibt</i> ihre speziellen Eigenschaften.“ L: „Bildet 2er bzw. 3er Gruppen und führt die Stationenarbeit durch. Von Station 1 bis 4 müssen <u>mindestens zwei</u> Stationen bearbeitet werden. <u>Station 5</u> muss jede/r bearbeiten.“ → Wahl- und Pflichtaufgaben	SLG, Stationenlernen in PA oder (3er) GA	Mosaikfliesen, Hutfliesen Folie und AB mit AA, AB (3seitig)
10'	ES	SuS präsentieren ihre Ergebnisse zu den verschiedenen Stationen; Mitschüler:innen ergänzen und diskutieren; Lehrkraft ergänzt Informationen über Hutfliese,	SV LV	Bild von Hut
Minimalziel				
5'	FB	Gesprächsrunde mit Feedback zum Stationenlernen, Abbau der Stationen	SLG	Box für Abbau
(+5')	Puffer, S1	Ausblick auf Spectre-Fliese, die ohne Spiegelungen auskommt.	LV	Bild von Spectre
(10')	HA S2	Weitere Vielecke <i>untersuchen</i> , ob mit ihnen solche Muster gelegt werden können. Ergebnis <i>notieren</i> und <i>begründen</i> .	PA, SLG	AB (3.Seite) ggf. Tafel oder Bilder

Legende: EI = Einstieg, EA = Erarbeitung, ES = Ergebnissicherung, SuS = Schüler:innen, L = Lehrkraft, SLG = Schüler:innen-Lehrkraft-Gespräch, PA = Partnerarbeit, GA = Gruppenarbeit, SV = SuS-Vortrag, LV = Lehrkraft-Vortrag, AB = Arbeitsblatt, AA = Arbeitsauftrag, FB = Feedback, HA = Hausaufgabe, S1 und S2 = zwei alternative Enden für die Unterrichtsstunde (Schluss 1, 2)

Abbildung 38: Ablaufplan der Unterrichtsstunde.

Name: _____

Datum: _____

Laufzettel

Regeln für das Stationenlernen:

- Lies die Aufgabenstellung zuerst sorgfältig durch.
- Versuche selbstständig eine Lösung zu finden.
- Wenn du Hilfe benötigst, frage zunächst einen Mitschüler/ eine Mitschülerin.
- Notiere auf dem Laufzettel, welche Stationen du beendet hast.
- Aufgaben beenden – nicht zwischen den Stationen hin- und herspringen.
- Immer nur ein Arbeitsblatt nehmen.
- Unterhaltungen leise führen.
- Sorgsam mit den Materialien umgehen.
- Stationen aufgeräumt verlassen.



Bild-Quelle: https://m.media-amazon.com/images/I/81YglbGmlGS._AC_S11500_.jpg

Station	Wahl/Pflicht	Fliesenform	✓	Wie gut war ich
1	Wahl	Quadrat		😊 😐 😞
2	Wahl	Rechteck		😊 😐 😞
3	Wahl	Raute		😊 😐 😞
4	Wahl	Dreieck		😊 😐 😞
5	Pflicht	Dreizehnckiger „Hut“		😊 😐 😞

Feedback:

Am schwersten fand ich: _____

Besonders interessant fand ich: _____

Insgesamt fand ich das Stationenlernen (mit Begründung): _____

Weitere Anmerkungen: _____

Abbildung 39: Laufzettel für das Stationenlernen.

Stationenlernen

Bearbeite von den Stationen 1 bis 4 mindestens zwei Stationen und zusätzlich die Station 5.

Arbeitsauftrag (für jede Station):

- (a) Schau die Fliese an und beschreibe, welches Muster sich ergibt, wenn die vorgegebene Fläche ohne Lücken ausgelegt wird.
- (b) Lege die vorgegebene Fläche mit der Fliesenform aus und zeichne das Muster in das vorgesehene Feld auf dem Arbeitsblatt (wähle einen geeigneten Maßstab).
- (c) Beschreibe, welches (wiederkehrende) Muster erkennbar ist. Vergleiche mit deiner Vermutung aus (a).

Notiert die Ergebnisse auf dem AB. Im Anschluss sollen diese der Klasse vorgestellt werden.

Stationenlernen

Bearbeite von den Stationen 1 bis 4 mindestens zwei Stationen und zusätzlich die Station 5.

Arbeitsauftrag (für jede Station):

- (a) Schau die Fliese an und beschreibe, welches Muster sich ergibt, wenn die vorgegebene Fläche ohne Lücken ausgelegt wird.
- (b) Lege die vorgegebene Fläche mit der Fliesenform aus und zeichne das Muster in das vorgesehene Feld auf dem Arbeitsblatt (wähle einen geeigneten Maßstab).
- (c) Beschreibe, welches (wiederkehrende) Muster erkennbar ist. Vergleiche mit deiner Vermutung aus (a).

Notiert die Ergebnisse auf dem AB. Im Anschluss sollen diese der Klasse vorgestellt werden.

Stationenlernen

Bearbeite von den Stationen 1 bis 4 mindestens zwei Stationen und zusätzlich die Station 5.

Arbeitsauftrag (für jede Station):

- (a) Schau die Fliese an und beschreibe, welches Muster sich ergibt, wenn die vorgegebene Fläche ohne Lücken ausgelegt wird.
- (b) Lege die vorgegebene Fläche mit der Fliesenform aus und zeichne das Muster in das vorgesehene Feld auf dem Arbeitsblatt (wähle einen geeigneten Maßstab).
- (c) Beschreibe, welches (wiederkehrende) Muster erkennbar ist. Vergleiche mit deiner Vermutung aus (a).

Notiert die Ergebnisse auf dem AB. Im Anschluss sollen diese der Klasse vorgestellt werden.

Abbildung 40: Arbeitsauftrag (dreimal auf eine Seite gedruckt) für die einzelnen Stationen (ergänzend zum nachfolgenden Arbeitsblatt).

Erste Station Fliesenform: _____

spezielle Eigenschaften: _____

(a) _____

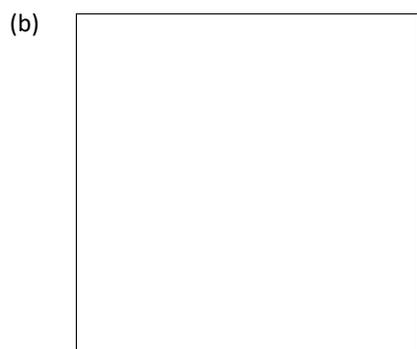


(c) _____

Zweite Station Fliesenform: _____

spezielle Eigenschaften: _____

(a) _____



(c) _____

Abbildung 41: Arbeitsblatt, Seite 1.

Dritte Station Fliesenform: _____

spezielle Eigenschaften: _____

(a) _____



(c) _____

Vierte Station Fliesenform: _____

spezielle Eigenschaften: _____

(a) _____



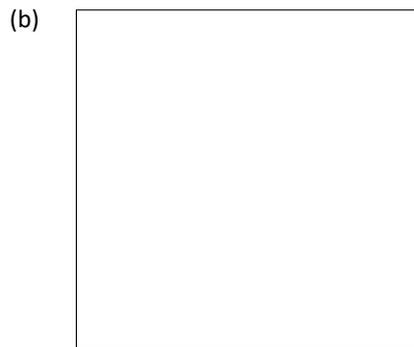
(c) _____

Abbildung 42: Arbeitsblatt, Seite 2.

Fünfte Station Fliesenform: _____

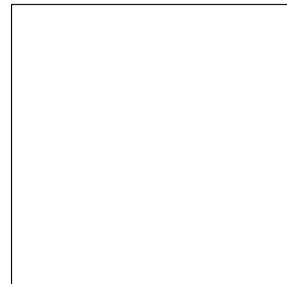
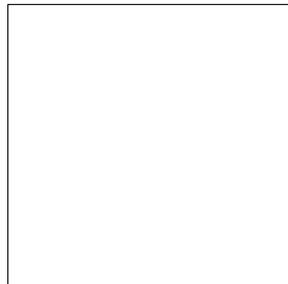
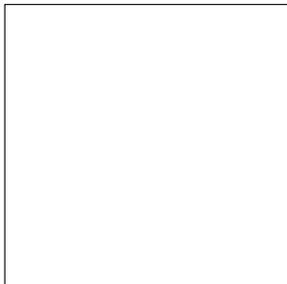
Beschreibung der Fliesenform (Anzahl der Ecken, Größe der Winkel): _____

(a) _____



(c) _____

Weitere Überlegungen: Untersuche weitere Vielecke, ob mit ihnen Muster (wie bei den Stationen) gelegt werden können. Notiere das Ergebnis und begründe.



Notizen: _____

Hilfekärtchen zur Fliesenform **QUADRAT**

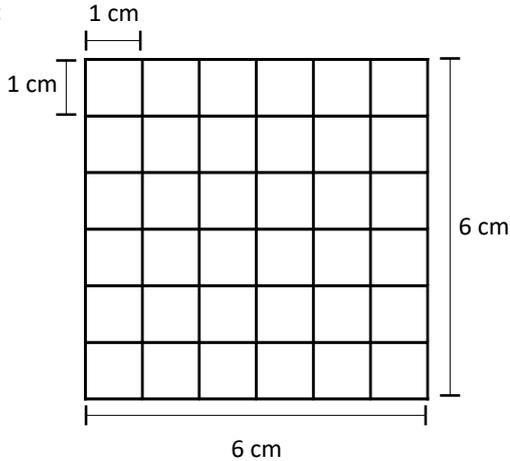
<p><i>Hinweis:</i> <i>Eigenschaften Quadrat</i></p>	<p>Überlege, wie die Winkel und Seitenlängen in diesem Viereck (zueinander) gewählt sind.</p>
<p><i>Hinweis:</i> <i>Anordnung Quadrat</i></p>	<p>Lege die Fliesen bspw. so aneinander, dass ihre Kanten aneinander angrenzen und sich je vier Ecken in einem Punkt treffen.</p>
<p><i>Lösung:</i> <i>Eigenschaften Quadrat</i></p>	<p>Quadrat: rechtwinklig (90°), alle vier Seiten sind gleich lang.</p>
<p><i>Lösung:</i> <i>Anordnung Quadrat</i></p>	<p>z.B.:</p>  <p>Das Diagramm zeigt ein großes Quadrat, das in ein 6x6-Matrix aus kleineren Quadraten unterteilt ist. Die obere linke Ecke ist mit 'z.B.:' beschriftet. Über dem ersten kleinen Quadrat steht '1 cm' mit einer horizontalen Maßlinie. Links neben dem ersten kleinen Quadrat steht '1 cm' mit einer vertikalen Maßlinie. Rechts neben dem gesamten 6x6-Quadrat steht '6 cm' mit einer vertikalen Maßlinie. Unter dem gesamten 6x6-Quadrat steht '6 cm' mit einer horizontalen Maßlinie.</p>

Abbildung 44: Hilfekärtchen zu Station 1.

Hilfekärtchen zur Fliesenform **RECHTECK**

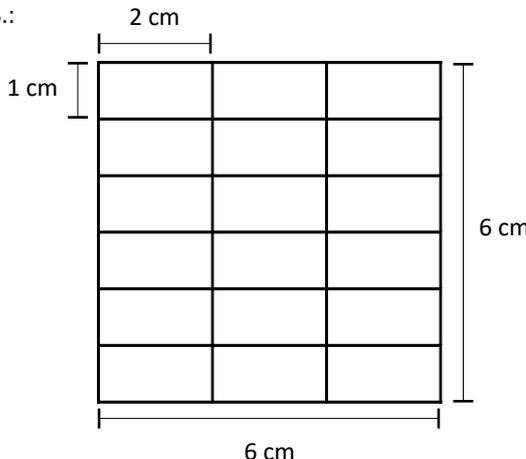
<p><i>Hinweis</i> <i>Eigenschaften Rechteck</i></p>	<p>Überlege, wie die Winkel und Seitenlängen in diesem Viereck (zueinander) gewählt sind.</p>
<p><i>Hinweis</i> <i>Anordnung Rechteck</i></p>	<p>Lege die Fliesen bspw. so aneinander, dass ihre Kanten aneinander angrenzen und sich je vier Ecken in einem Punkt treffen.</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Eigenschaften Rechteck</i></p>	<p>Rechteck: rechte Winkel (90°), gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang.</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Anordnung Rechteck</i></p>	<p>z.B.:</p>  <p>Das Diagramm zeigt ein großes Rechteck, das in ein 3x6-Muster von kleineren Rechtecken unterteilt ist. Die Gesamtlänge des großen Rechtecks ist 6 cm, und die Gesamtbreite ist ebenfalls 6 cm. Ein einzelnes kleines Rechteck hat die Abmessungen 2 cm x 1 cm.</p>

Abbildung 45: Hilfekärtchen zu Station 2.

Hilfekärtchen zur Fliesenform **RAUTE**

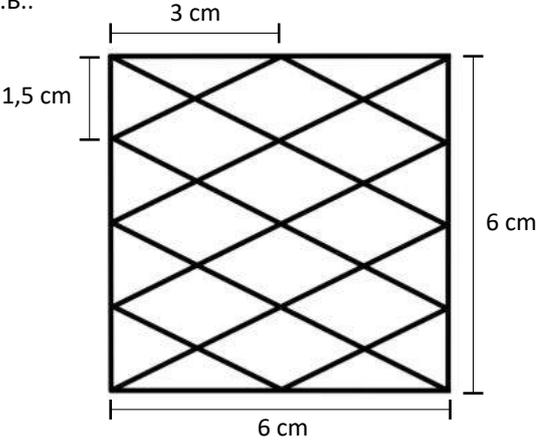
<p><i>Hinweis</i> <i>Eigenschaften Raute</i></p>	<p>Überlege, wie die Winkel und Seitenlängen in diesem Viereck (zueinander) gewählt sind.</p>
<p><i>Hinweis</i> <i>Anordnung Raute</i></p>	<p>Lege die Fliesen bspw. so aneinander, dass ihre Kanten aneinander angrenzen. Dies gelingt indem sich insgesamt vier Ecken in einem Punkt treffen und dabei Ecken mit gleichen Winkeln einander gegenüberliegen (d.h. nie direkt nebeneinander liegen).</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Eigenschaften Raute</i></p>	<p>Raute: alle Seiten sind gleich lang, gegenüberliegende Seiten sind parallel.</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Anordnung Raute</i></p>	<p>z.B.:</p>  <p>Das Diagramm zeigt ein Viereck, das durch diagonale Linien in ein Gitter aus kleineren Raute-Fliesen unterteilt ist. Die äußeren Abmessungen sind 6 cm in der Breite und 6 cm in der Höhe. Die inneren Abmessungen sind 3 cm in der Breite und 1,5 cm in der Höhe.</p>

Abbildung 46: Hilfekärtchen zu Station 3.

Hilfekärtchen zur Fliesenform **DREIECK**

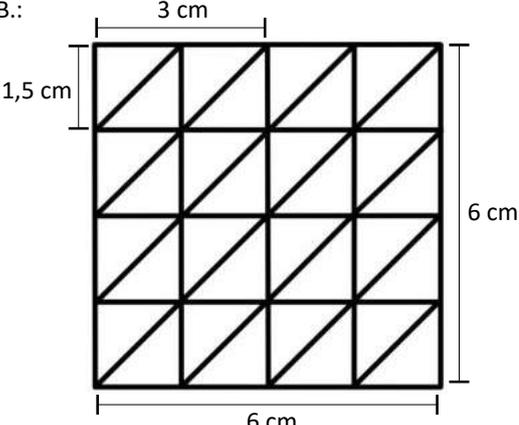
<p><i>Hinweis</i> <i>Eigenschaften Dreieck</i></p>	<p>Überlege, welche besondere Dreieckform vorliegt und wie die Winkel und Seitenlängen (zueinander) gewählt sind.</p>
<p><i>Hinweis</i> <i>Anordnung Dreieck</i></p>	<p>Lege zwei Dreiecke so aneinander, dass sie ein Parallelogramm bilden. Mehrere solcher Parallelogramme können lange Streifen bilden. Mehrere solcher Streifen füllen die Fläche aus.</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Eigenschaften Dreieck</i></p>	<p>Dreieck: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°. Gleichschenkliges Dreieck: zwei Seiten sind gleich lang. Gleichseitiges Dreieck: alle Seiten sind gleich lang, die Winkel betragen jeweils 60°.</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Anordnung Dreieck</i></p>	<p>z.B.:</p> 

Abbildung 47: Hilfekärtchen zu Station 4.

Hilfekärtchen zur Fliesenform „HUT“

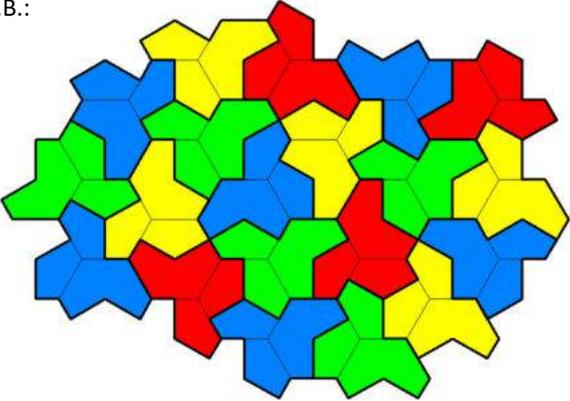
<p><i>Hinweis</i> <i>Eigenschaften Hut</i></p>	<p>Notiere die Anzahl der Ecken (zählen) sowie die Größen aller Winkel (ausmessen).</p>
<p><i>Hinweis</i> <i>Anordnung Hut</i></p>	<p>Verwende ggf. die Kopiervorlage aus der Bastelmappe (© Heinz Klaus Strick 2023). Dort sind weitere Striche in die Hüte eingezeichnet, die zu regelmäßigen Sechsecken zusammgelegt werden können und so das „korrekte“ Anlegen erleichtern.</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Eigenschaften Hut</i></p>	<p>Hut: 13 Ecken, Winkel: 270°, 120°, 90°, 120°, 270°, 120°, 120°, 90°, 240°, 90°, 240°, 90°, 120°</p>
<p><i>Lösung</i> <i>Anordnung Hut</i></p>	<p>z.B.:</p> 

Bild-Quelle: © Heinz Klaus Strick 2023

Bastelmappe bestellbar unter www.mathematik-ist-schoen.jimdo.com

Abbildung 48: Hilfekärtchen zu Station 5.

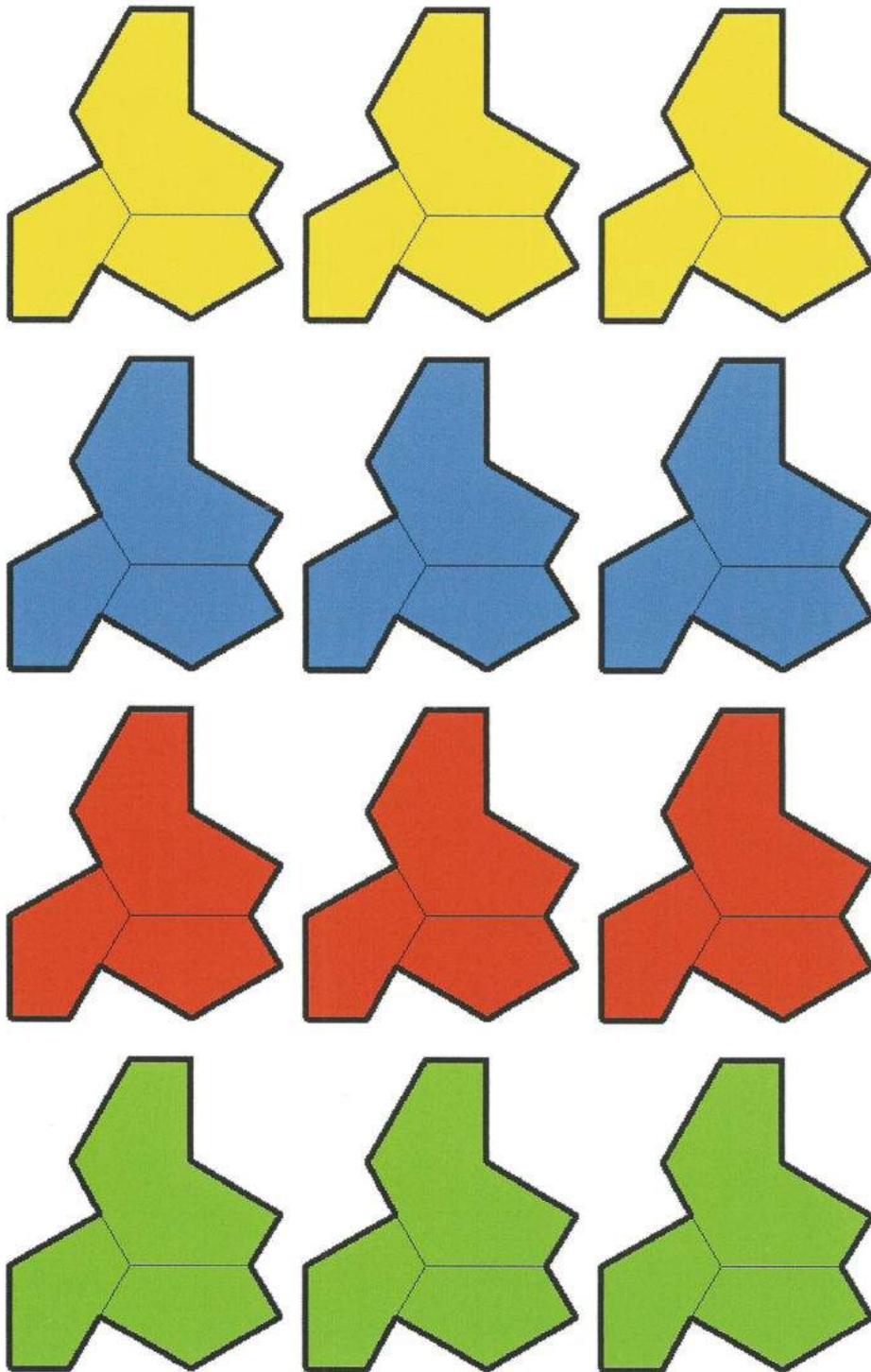


Abbildung 49: Scan der Hut-Vorlage aus der Bastelmappe 2023, Seite 34.

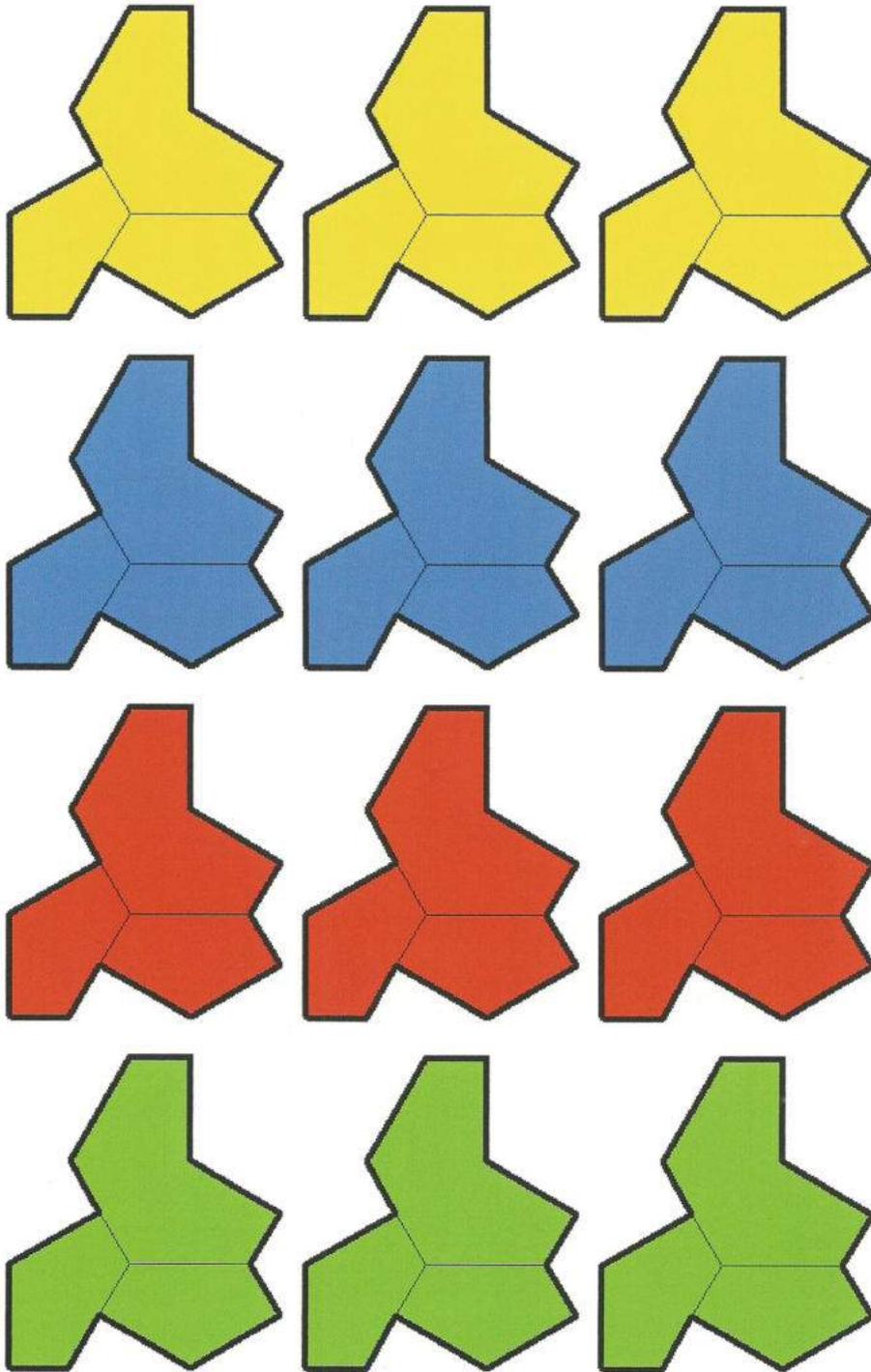
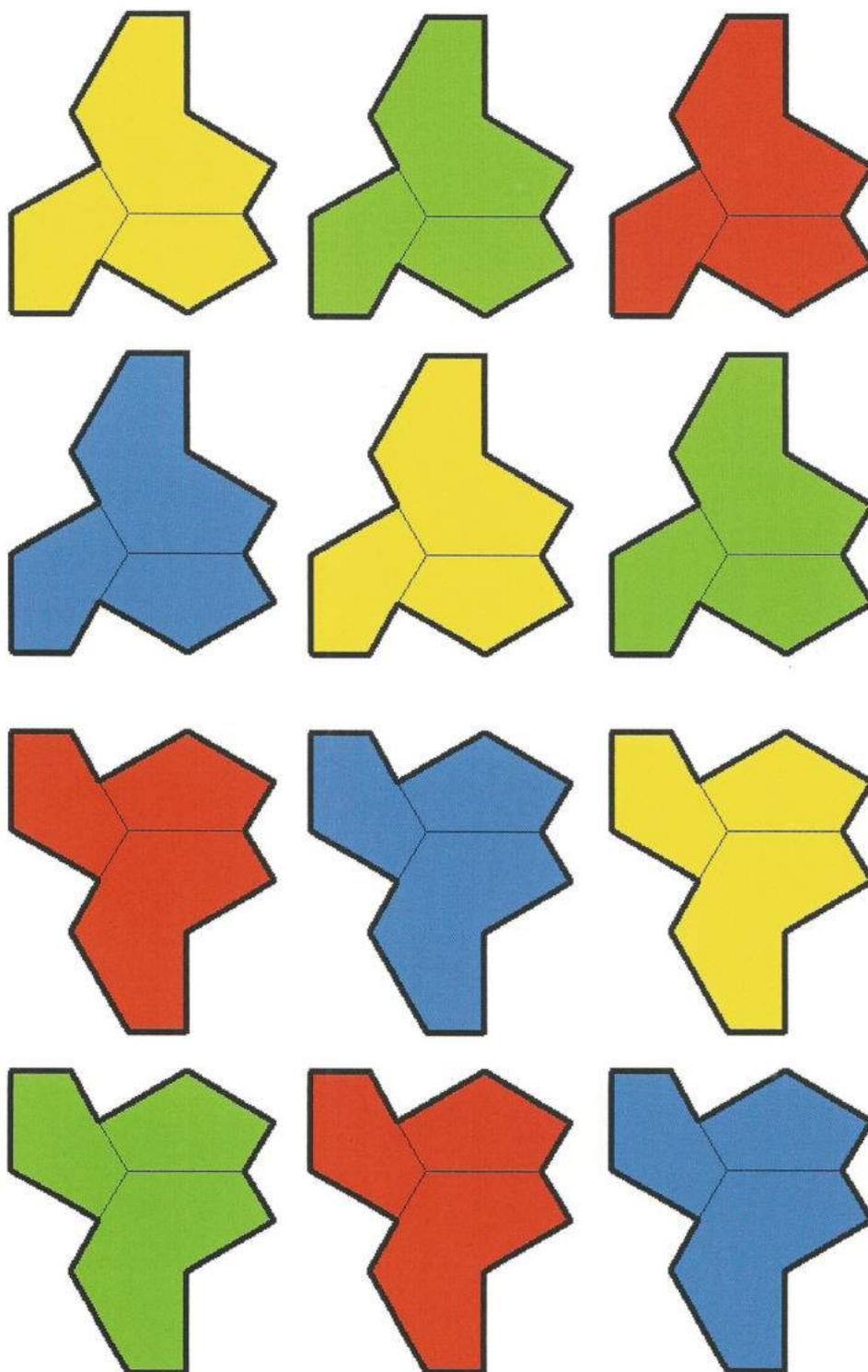


Abbildung 50: Scan der Hut-Vorlagen aus der Bastelmappe 2023, Seite 35.



www.mathematik-ist-schoen.jimdo.com © Heinz Klaus Strick 2023 – Seite 36 / 36

Abbildung 51: Scan der Hut-Vorlagen aus der Bastelmappe 2023, Seite 36.

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

- [Bi] Manon Bischoff. *Hobby-Mathematiker findet lang ersehnte Einstein-Kachel*, Spektrum.de, 29.03.2023. Zuletzt aufgerufen unter <https://www.spektrum.de/news/hobby-mathematiker-findet-lang-ersehnte-einstein-kachel/2124963> am 21.12.2023.
- [BP] Ministerium für Kultus, Jugend und Sport. *Bildungsplan des Gymnasiums Mathematik – Baden-Württemberg*, Stuttgart, 2016. Zuletzt aufgerufen unter <https://www.bildungsplaene-bw.de/,Lde/LS/BP2016BW/ALLG/GYM/M> am 21.12.2023.
- [GS] Branko Grünbaum und G.C. Shephard. *Tilings and Patterns*. Dover, zweite Auflage, 2016.
- [HKS] Heinz Klaus Strick. *Mathematik ist wunderschön*, Berlin, 2. Auflage, 2020. Zuletzt aufgerufen unter <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-61682-6> am 21.12.2023.
- [Le] Timo Leuders. *Entdeckendes Lernen – Produktives Üben*, Universität Freiburg, 2014. Zuletzt aufgerufen unter https://www.researchgate.net/publication/261402345_Entdeckendes_Lernen_-_Produktives_Uben am 21.12.2023.
- [MK] F. Modler, M. Kreh. *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2*, Heidelberg, 2012. Zuletzt aufgerufen unter https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-8274-2896-7_12.pdf am 21.12.2023.
- [MT] Dr. Denis Vogel. *Mengentheoretische Topologie – Vorlesungsmanuskript*, Universität Heidelberg, Wintersemester 2018/19.
- [MW] Eric Weisstein. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*. Zuletzt aufgerufen unter <https://mathworld.wolfram.com> am 21.12.2023. Darunter insbesondere folgende Einträge:
- *Polykite* unter <https://mathworld.wolfram.com/Polykite.html>,
 - *Polyform* unter <https://mathworld.wolfram.com/Polykite.html>,
 - *Hat Polykite* unter <https://mathworld.wolfram.com/HatPolykite.html>.

[Ri] Prof. Alexander F. Ritter. *Oxford Masterclasses in Geometry 2014. Part 2: Lectures on Penrose Tilings*. Oxford, 2014. Zuletzt aufgerufen unter <https://www.claymath.org/library/Ritter/ritter-lectures-on-penrose-tilings.pdf> am 21.12.2023.

[SMKGS] David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, Chaim Goodman-Strauss. *An aperiodic monotile*. Preprint March 2023. Zuletzt aufgerufen unter <https://arxiv.org/pdf/2303.10798.pdf> am 21.12.2023.

[Wi] Wikipedia – The Free Encyclopedia. *Isohedral figure*. Zuletzt aufgerufen unter https://en.wikipedia.org/wiki/Isohedral_figure am 21.12.2023.