

# Dimensionen fraktaler Schwämme

Methoden der Konstruktion, Berechnung und Visualisierung

**Cornelius Zenkert**

Prof. Dr. Maria Beatrice Pozzetti

Bachelorarbeit

Fakultät für Mathematik und Informatik  
Universität Heidelberg

15.07.2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Abstract . . . . .	2
1.2	Einleitung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Konstruktion</b>	<b>5</b>
2.1	Iterierte Funktionensysteme . . . . .	5
2.1.1	Visualisierung mit <i>OpenSCAD</i> . . . . .	8
2.2	Symbolische Darstellung . . . . .	9
2.2.1	Symbolische Dynamik . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Maße auf dem Atraktor</b>	<b>13</b>
3.1	Das Bernoullimaß . . . . .	13
3.1.1	Weitere invariante Maße . . . . .	14
3.2	Pseudo-Bernoullimaß . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Graphische Darstellung durch das Chaos Game</b>	<b>16</b>
4.1	Konvergenz . . . . .	17
4.1.1	Implementierung mit <i>Python</i> . . . . .	19
4.2	Ergodizität . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Die Hausdorffdimension</b>	<b>23</b>
5.1	Konstruktion der Hausdorffdimension . . . . .	23
5.2	Einfache Abschätzungen . . . . .	25
5.3	Dynamische Dimension . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Klassifizierung von Fraktalen</b>	<b>28</b>
6.1	Selbstaffine Mengen . . . . .	28
6.2	Baranski-Mengen . . . . .	31
6.3	Sierpinski-Schwämme . . . . .	31
6.4	Selbstähnliche Mengen . . . . .	34
6.5	Baranski-Schwämme . . . . .	37

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Abstract

Durch iterierte Funktionensysteme erzeugte Fraktale ermöglichen in vielen Fällen nicht nur eine handhabbare Berechnung der Hausdorffdimension, sie besitzen auch Verbindungen zu dynamischen Systemen und können so mit invarianten Maßen versehen werden. Diese beiden Aspekte weisen eine Überschneidung auf, die ich in Bezug auf eine neuere Veröffentlichung darstellen möchte.

Im ersten Abschnitt meiner Arbeit behandle ich die Konstruktion von fraktalen Attraktoren aus iterierten Funktionensystemen und die dadurch ermöglichte Darstellung des Attraktors als Folgenraum. Mit Hilfe dieser symbolischen Darstellung des Attraktors kann man die Iteration des Funktionensystems auf dem Attraktor als dynamisches System auffassen. Dies ermöglicht es die Dynamik unter maßtheoretischen Gesichtspunkten zu betrachten. Mit dem *chaos game* erhält man daraus eine Methode zur Visualisierung fraktaler Attraktoren. Im Weiteren werde ich die Hausdorffdimension einführen und für mehrere Fälle Sätze behandeln, die die Berechnung der Hausdorffdimension aus den Eigenschaften des erzeugenden iterierten Funktionensystems ermöglichen. Dies führt zuletzt mit der Erweiterung der Hausdorffdimension auf Maße zu einer Kombination der beiden Themen. Die Arbeit soll dabei die Grundlagen einer Veröffentlichung [DS17] zu diesem Thema aufarbeiten und das Ergebnis dieser nachvollziehbar machen.

Fractals produced by iterated function systems not only enable a calculation of the hausdorff dimension, they also posses connections to dynamical systems that allow for an invariant measure to be constructed. I am going to consider these two aspects in relation to a recent research publication. In the first section I'm going to introduce the construction of fractals via iterated function systems and the related symbolic representation. From here, I'm going to use this representation to consider measure theoretic dynamics. This will lead to a visual representation of fractals via the *chaos game*. In the following, I am going to introduce the hausdorff dimension and proof multiple methods of calculation in relation to the construction in different cases. I am going to conclude with a generalization of the hausdorff dimension to measures, combining both topics. This will lead to understanding the preliminaries of the recent publication [DS17].

## 1.2 Einleitung

Eine typische Eigenschaft von Fraktalen besteht in der Selbstähnlichkeit, also der Eigenschaft, kleinere Kopien ihrer selbst zu enthalten, hin zu einer unendlich feinen Struktur. Solche Objekte sind in der Regel das Ergebnis eines Grenzwertprozesses. Dabei können solche Prozesse verschiedene Formen annehmen und die finale Menge unterschiedlich definiert sein, man denke etwa an die Mandelbrot- oder Julia-Mengen. Um fraktale Objekte eingebettet in den  $\mathbb{R}^n$  mit einer großen Vielfalt von Formen und Eigenschaften zu erzeugen verwendet man aber häufig die Iteration einer als  $\Phi$  bezeichneten Menge von Funktionen  $\phi_i$  auf einer bestimmten Startmenge  $D$  in  $\mathbb{R}^n$ . In dieser Arbeit betrachte ich solche, durch sogenannte *iterierte Funktionensysteme* erzeugte Fraktale. Da das iterierte Funktionensystem genutzt werden kann, um eine Koordinatenabbildung auf den Atraktor zu konstruieren, ist es möglich, auf solchen Objekten auch Maße zu definieren und die Dynamik der Iteration elegant zu beschreiben. Aber auch die Hausdorffdimension des Atraktors lässt sich auf Basis der erzeugenden iterierten Funktionensystems in vielen Fällen berechnen.

Iterierte Funktionensysteme sind Familien von Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , die als Kontraktion wirken, also den Abstand zweier Punkte verringern.

**Definition 1.1** (Iterierte Funktionensysteme). *Eine endliche Familie von Kontraktionen  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  mit  $m \geq 2$  auf einer kompakten Menge  $D \subset \mathbb{R}^d$  heißt iteriertes Funktionensystem.*

Indem man nun jeweils das vereinigte Bild einer kompakten Startmenge all dieser Funktionen betrachtet und diesen Prozess iterativ wiederholt, erhält man im Grenzwert eine invariante Menge  $A$ , den Atraktor

$$\bigcup_i \phi_i(A) = A.$$

Ein wesentliches Ergebnis des ersten Kapitels wird sein, die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Atraktors zu zeigen.

**Satz 1.2.** *Der Atraktor  $A$  eines IFS  $\Phi$  ist eindeutig, geschlossen und nicht leer.*

Iterierte Funktionensysteme kann man dabei für mehr nutzen, als nur ein fraktales Objekt zu definieren. Mit fraktalen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  direkt zu arbeiten kann durch ihre unendlich feine Struktur und das häufige Fehlen 'glatter' Abschnitte sehr schwierig werden. Ist ein solches Objekt aber durch ein iteriertes Funktionensystem erzeugt, kann man es nutzen, um eine 'Koordinatenabbildung' in eine Teilmenge des Folgenraums  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  zu konstruieren.

Da der Atraktor selbst per Definition abgeschlossen unter der Iteration des erzeugenden Funktionensystems ist, lässt sich dies als dynamisches System auffassen. In der Theorie der dynamischen Systeme ist es eine übliche Vorgehensweise, den eigentlichen Phasenraum mit einem als *Symbolischen Raum* bezeichneten Folgenraum zu verknüpfen, um die Dynamik handhabbarer darstellen zu können. Diese Konstruktion erlaubt es auch, unter der Iteration invariante Maße auf dem Atraktor zu definieren. Hier werde ich vor allem mit dem *Bernoullimaß* arbeiten, dass jeder Funktion des iterierten Funktionensystems eine feste Wahrscheinlichkeit zuordnet und dadurch ein Maß auf dem Atraktor definiert. Mithilfe der Ergodentheorie werden wir so die Dynamik auf dem Atraktor auch in Bezug auf Maße untersuchen und daraus mit dem *chaos game* einen Algorithmus für die graphische Darstellung von Atraktoren gewinnen. Das chaos game basiert darauf, dass man in jedem Iterationsschritt eine zufällig gewählte Funktion  $\phi_i$  aus dem iterierten Funktionensystem auf einen

einzelnen Punkt anwendet. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Atraktor wirkt sich hier auf die Wahrscheinlichkeit aus, mit der eine der Funktionen gewählt wird. Ein Ergebnis dieser Arbeit wird sein, dass die Punkte der Iteration im Grenzwert den Atraktor approximieren und die mittlere Dichte der so erzeugten Punkte der Dichte des verwendeten Maßes auf dem Atraktor entspricht. Der so validierte Algorithmus lässt sich am Computer implementieren und zu Visualisierung von entsprechenden Fraktalen nutzen.

Fraktale sind oft dadurch charakterisiert, dass sie im Allgemeinen keine ganzzahlige Dimension besitzen wie gewöhnlichere geometrische Objekte. Gemeint ist in der Regel die *Hausdorffdimension*  $\dim_H$ , ein verallgemeinerter Dimensionsbegriff, der in Kapitel 5 der Arbeit eingeführt wird. Die Hausdorffdimension ist eine der entscheidenden geometrischen Eigenschaften eines fraktalen Objekts und oft von großem Interesse. Sie ist der Exponent, mit dem eine dem Volumen oder Fläche vergleichbarer Größe eines fraktalen Objekts skaliert und daher nötig, um von derartigen geometrischen Begriffen im Kontext von Fraktalen sprechen zu können. Beschrieben wird dieses verallgemeinerte Volumen durch das Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^s$ . Ihre Bestimmung ist jedoch im Allgemeinen schwierig, für einige Klassen von Fraktalen, die durch selbstaffine oder selbstähnliche Funktionensysteme erzeugt wurden oder deren Bilder in bestimmter Weise angeordnet sind, lassen sich hingegen Formeln für die Dimension finden. Hier werde ich selbstaffine und selbstähnliche Mengen sowie Sierpinski- und Baranskischwämme betrachten. Dies wird Gegenstand des sechsten Kapitels sein.

Zuletzt möchte ich in Anlehnung an eine neuere Arbeit von Tushar Das und David Simmons [DS17] die Verbindung der Hausdorffdimension eines Atraktors und den darauf definierten invarianten Maßen betrachten. Indem man bei der Berechnung der Dimension Nullmengen des zu betrachtenden Maßes vernachlässigt, kann man die Hausdorffdimension eines Maßes definieren, die immer kleiner gleich der Dimension des Atraktors ist. Die Autoren geben auch eine Methode der Berechnung, die ich an einigen Beispielen nachvollziehen möchte. Das Supremum der Hausdorffdimension aller invarianten Maße wird als dynamische Dimension bezeichnet. Diese ist, wie man leicht sieht kleiner gleich der Hausdorffdimension, doch in vielen Fällen gilt Gleichheit. Das Ergebnis des erwähnten Papers ist, dass in manchen Fällen die Dimensionen auch ungleich sind. Dies wird durch eine Methode erreicht, sowohl die Hausdorff- als auch die dynamische Dimension über die Dimension verschiedener Klassen von Maßen abzuschätzen. Um dieses Ergebnis der Arbeit nachvollziehbar zu machen, möchte ich die dafür nötigen Grundlagen darstellen und mit Beispielen und Graphiken aufbereiten.

# Kapitel 2

## Konstruktion

### 2.1 Iterierte Funktionensysteme

Die bekannte *Cantormenge* erhält man, indem man zunächst das anfängliche Intervall  $[0, 1]$  auf die beiden Intervalle  $[0, \frac{1}{3}]$  und  $[\frac{2}{3}, 1]$  projiziert, also die beiden Funktionen

$$\phi_1 : x \mapsto \frac{1}{3}x \tag{2.1}$$

$$\phi_2 : x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \tag{2.2}$$

auf das Intervall anwendet. Wendet man diese Funktionen iterativ auf die erhaltenen Mengen erneut an, erhält man im Limes die Cantormenge.

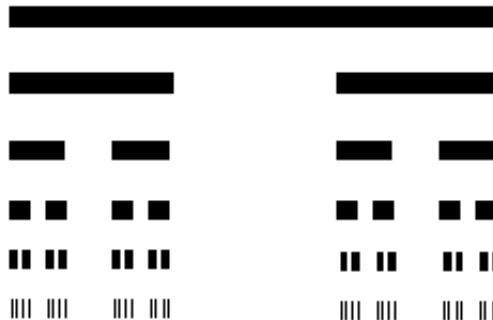


Abbildung 2.1: Die ersten fünf Iterationen der Cantormenge.

Durch iterative Anwendung der Funktionen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  scheint also das gesamte Intervall  $[0, 1]$  und damit auch jeder Punkt in diesem Intervall gegen eine bestimmte Menge zu konvergieren. Es ist intuitiv klar, dass die iterierten Funktionen dazu kontrahierend wirken müssen.

**Definition 2.1** (Kontraktion). Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  kompakt und für die Abbildung  $\phi : D \rightarrow D$  gelte

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq r|x - y|$$

für alle  $x, y \in D$  und ein  $r \in (0, 1)$ . Dann ist  $\phi$  eine Kontraktion. Gilt Gleichheit, so nennt man  $S$  auch Ähnlichkeit.

Kontraktionen sind offensichtlich immer stetig. Ähnlichkeiten erhalten die geometrische Form von Mengen und bilden sie auf eine kleinere Version ihrer Selbst ab. Dies gilt auch für die oben genutzten Funktionen zur Erzeugung der Cantormenge, in ihrem Fall gilt  $|\phi_i(x) - \phi_i(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$ .

**Definition 2.2** (Iterierte Funktionensysteme). Eine endliche Familie von Kontraktionen  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  mit  $m \geq 2$  auf einer kompakten Menge  $D \subset \mathbb{R}^d$  heißt iteriertes Funktionensystem (IFS). Wir setzen  $\Phi(x) = \bigcup_{i=0}^m \phi_i(x)$  für  $x \in D$ .

Man fordert an dieser Stelle, dass das iterierte Funktionensystem aus mindestens zwei Funktionen besteht. Ansonsten würden alle Punkte nur gegen ein und den selben Grenzwert konvergieren, im Fall des obigen Beispiels wären dies etwa die Punkte 0 beziehungsweise  $\frac{2}{3}$ . Es ist bemerkenswert, dass, während sich die Iteration einer einzigen solchen Funktion vollkommen trivial verhält, die gemeinsame Iteration von zwei oder mehr Funktionen überraschende und unendlich feine Strukturen hervorbringen kann.

Diese gesuchte Menge erhält man im Grenzwert der Iteration der Funktion  $\Phi$ . Damit ist klar, dass jeder in dieser Menge liegende Punkt von  $\Phi$  wiederum die selbe Menge abgebildet werden muss, da er sonst selbst nicht im Grenzwert läge. Man macht also folgende Definition:

**Definition 2.3** (Atraktor eines IFS). Wir nennen die unter  $\Phi$  invariante Teilmenge  $A \subset D$  Atraktor des IFS, wenn also gilt

$$A = \Phi(A).$$

**Lemma 2.4.** Alternative Darstellung des Atraktors Der Atraktor eines iterierten Funktionensystems  $\Phi$  lässt sich darstellen als der Grenzwert der Iteration von  $\Phi$  auf dem Raum  $D$ , also als

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D).$$

*Beweis.* Für alle  $a \in A$  gilt nach Definition, dass auch  $\Phi^n(a) \in A$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $a$  auch in  $D$  liegt folgt, dass  $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)$ . Es gilt also

$$A \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D).$$

Andererseits ist

$$\Phi\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi^n(D) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D),$$

da  $\Phi^0(D) = D$  ist und  $\Phi$  nur auf  $D$  abbildet. Es folgt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D) \subset A$$

und damit die Gleichheit. □

Der Atraktor eines iterierten Funktionensystems ist durch einen Grenzwertprozess über Teilmengen von  $D$  definiert. Daher ist es naheliegend, ein Maß dafür einzuführen, wie gut eine Menge eine andere approximiert. Die dafür verwendete *Hausdorff-Metrik* beschreibt einen Abstand zwischen zwei kompakten Teilmengen von  $D$  anschaulich durch den geringsten Abstand, der zwischen einem Punkt der einen Menge und der anderen Menge liegt.

**Definition 2.5** (Hausdorff-Metrik). *Sei  $\mathcal{D}$  der Raum der nicht leeren, kompakten Teilmengen von  $D$  und sei für eine Menge  $A \in \mathcal{D}$*

$$A_\delta := \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ für ein } a\} \quad (2.3)$$

die Delta-Umgebung von  $A$ . Dann ist die Hausdorff-Metrik auf  $\mathcal{D}$  definiert durch

$$d_{\mathcal{D}}(A, B) := \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ und } B \subset A_\delta\}. \quad (2.4)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass  $d_{\mathcal{D}}$  tatsächlich eine Metrik und  $(\mathcal{D}, d_{\mathcal{D}})$  ein vollständiger metrischer Raum ist, da aufgrund der Konstruktion der Delta-Umgebungen die Eigenschaften der Metrik auf dem vollständigen metrischen Grundraum  $D$  auf die Hausdorff-Metrik übertragen werden. Mithilfe der Hausdorff-Metrik lässt sich nun folgende Aussage über den Atraktor treffen.

**Satz 2.6.** *Der Atraktor  $A$  eines IFS  $\Phi$  ist eindeutig, geschlossen und nicht leer.*

*Beweis.* Für  $A, B \in \mathcal{D}$  gilt

$$d_{\mathcal{D}}(\Phi(A), \Phi(B)) = d_{\mathcal{D}}\left(\bigcup_{n=1}^m \phi_n(A), \bigcup_{n=1}^m \phi_n(B)\right) \leq \max_{1 \leq n \leq m} d_{\mathcal{D}}(\phi_n(A), \phi_n(B))$$

Unter Ausnutzung der Definition von  $d_{\mathcal{D}}$  und der Kontraktionseigenschaft von  $\Phi$  folgt

$$d_{\mathcal{D}}(\Phi(A), \Phi(B)) \leq \left(\max_{1 \leq n \leq m} r_n\right) d_{\mathcal{D}}(A, B)$$

Damit ist  $\Phi$  eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum  $(\mathcal{D}, d_{\mathcal{D}})$  und es folgt aus dem Banachschem Fixpunktsatz, dass  $\Phi$  einen eindeutigen Fixpunkt in  $\mathcal{D}$  besitzt, d.h. dass eine eindeutige, nicht leere und kompakte Teilmenge  $A$  von  $D$  existiert, sodass  $\Phi(A) = A$  ist. [Fal14, Theorem 9.1] □

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt auch, dass die Iteration eines beliebigen Startpunktes in  $\mathcal{D}$  in  $d_{\mathcal{D}}$  gegen den Fixpunkt, also den Atraktor konvergiert. Dies bedeutet, dass man die Iteration  $\Phi^n(F)$  mit einer beliebigen nicht leeren kompakten Menge  $F \subset D$  beginnen kann und

$$\Phi^n(F) \rightarrow A$$

in der Hausdorff-Metrik konvergiert. Diese Eigenschaft lässt sich sehr schön graphisch demonstrieren.



### 2.1.1 Visualisierung mit *OpenSCAD*

Ein bekanntes Beispiel ist das *Sierpinski-dreieck*. Dieses wird durch das iterierte Funktionensystem  $\Phi$  auf  $D = [0, 1]^2$  bestehend aus den Funktionen

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1, x_2) \\ \phi_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1, x_2) + (0, 1) \\ \phi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1, x_2) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

erzeugt und besteht aus ineinander verschachtelten gleichseitigen Dreiecken. Mithilfe der Software *OpenSCAD* lassen sich die Iterationen verschiedener Startmengen  $F$  darstellen. In Abbildung 1.2 werden ein Dreieck, ein Kreis und ein Quadrat als Startmengen der Iteration verwendet und jeweils  $\Phi^1(F)$ ,  $\Phi^3(F)$  und  $\Phi^6(F)$  dargestellt.

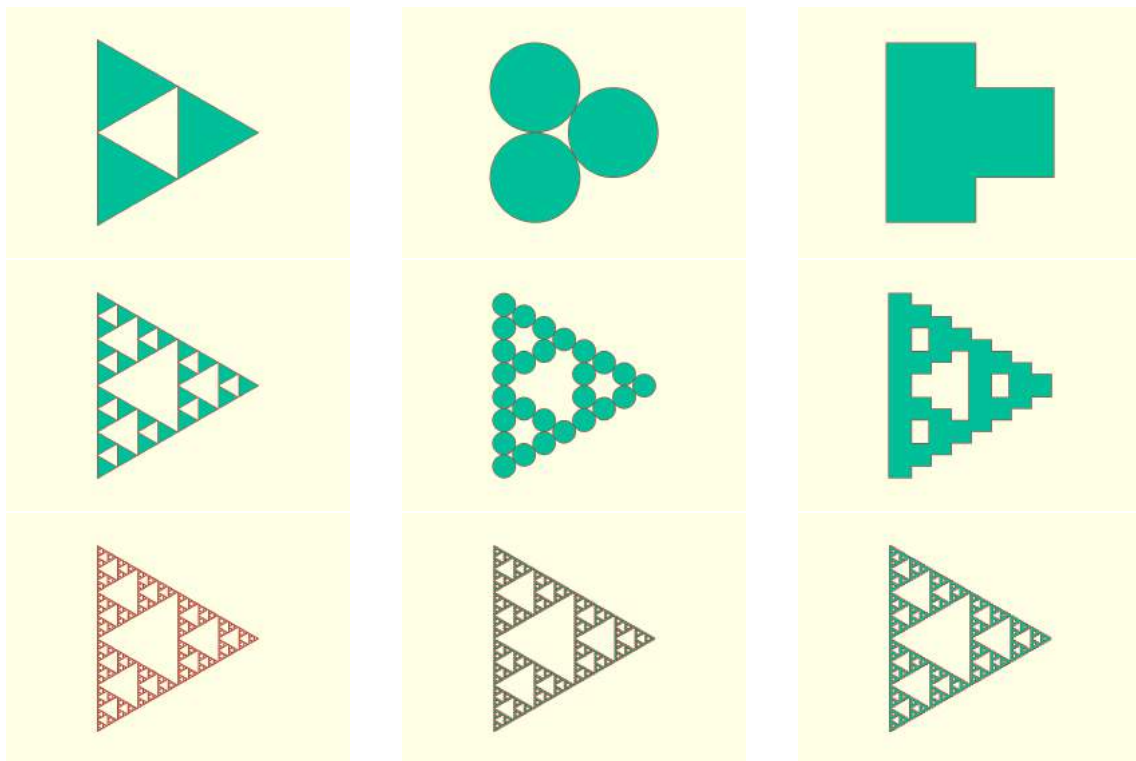


Abbildung 2.2: Darstellung von  $\Phi^1(F)$ ,  $\Phi^3(F)$  und  $\Phi^6(F)$ . Die Konvergenz gegen den gleichen Atraktor ist deutlich erkennbar.

OpenSCAD ist ein open source Grafikprogramm, mit dem sich über ein Skript zwei- oder dreidimensionale Objekte darstellen lassen. Das Skript basiert auf einer eigenen, funktionalen Programmierung. Dies ermöglicht es, graphische Objekte über Rekursionen zu definieren. Rekursionen hier

sind besonders geeignet, um die Iteration einer Menge von Funktionen  $\Phi$  auf einer Startmenge darzustellen.

Die rekursive Funktion besteht aus einer Schleife mit der Anzahl der Durchläufe  $n$  entsprechend der gewünschten Zahl der Iterationen, die wiederum eine *if*-Abfrage enthält. Diese ruft für  $n > 0$  die Funktion jeweils nach Anwendung aller Funktionen  $\phi_i$  des IFS erneut auf, für  $n = 0$  wird die gewählte Startmenge eingefügt. Auf diese werden dann im rekursiven Wiederaufstieg alle Kombinationen der Funktionen  $\phi_i$  angewandt. Damit lässt sich über endliche Iterationen eine Approximation des Atraktors erreichen. Sehr hohe Zahlen an Iterationen sind aber schwierig, da in jedem Schritt das Bild sehr vieler Punkte bestimmt werden muss und der Rechenaufwand der Rekursion mit  $e^n$  exponentiell wächst.

Die Darstellung von Iterationen mit OpenSCAD ist eine der beiden Methoden, mit denen alle noch folgenden Grafiken erzeugt wurden

## 2.2 Symbolische Darstellung

Die fraktale Geometrie des Atraktors macht es schwierig, direkt mit ihm zu arbeiten. Er ist unendlich fein gestükkelt und über den Raum  $D$  verteilt. Gesucht ist also eine vereinfachende Parametrisierung, die es erlaubt, Punkte auf dem Atraktor zu identifizieren und zu manipulieren.

Um eine solche Darstellung zu finden nutzt man die eben gezeigte Form des Atraktors

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)$$

wobei jeweils  $\Phi(D) = \bigcup_{i=0}^m \phi_i(D)$  gilt. Daraus folgt, dass es für jeden Punkt  $a \in A$  eine Folge  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in der Indexmenge  $\{1, \dots, m\}$  des iterierten Funktionensystems  $\Phi$  geben muss, sodass für alle  $n$

$$a \in \phi_{\omega_n}(D)$$

liegt. Auf diese Weise kann man jeden Punkt  $a \in A$  mit einer Folge in der Indexmenge  $\{1, \dots, m\}$  identifizieren.

Zunächst betrachten wir den als symbolischen Zustandsraum bezeichneten Folgenraum. Die folgende Konstruktion des symbolischen Raumes basiert auf Kapitel 1 von [PY98].

**Definition 2.7** (Symbolischer Zustandsraum). *Der einem IFS  $\Phi$  zugeordnete Folgenraum  $\Omega$  ist definiert als*

$$\Omega := \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$$

wobei  $\{1, \dots, m\}$  die Indexmenge des IFS  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  ist. Für ein Element  $\omega \in \Omega$  bezeichnen wir mit  $\omega_n$  das  $n$ 'te Folgenglied.

Um eine Metrik auf  $\Omega$  zu erhalten, definiert man  $N(\omega, \tilde{\omega}) := \min\{N \in \mathbb{N} : \omega_n \neq \tilde{\omega}_n\}$  für  $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$  sowie

$$d(\omega, \tilde{\omega}) := \begin{cases} (\frac{1}{2})^{N(\omega, \tilde{\omega})} & \text{für } \omega \neq \tilde{\omega} \\ 0 & \text{für } \omega = \tilde{\omega} \end{cases}$$

**Lemma 2.8.**  $(\Omega, d)$  ist ein kompakter metrischer Raum

*Beweis.* Es lässt sich leicht nachrechnen, dass  $d$  eine Metrik ist. Wir zeigen mithilfe eines Diagonalarguments, dass  $\Omega$  folgenkompakt ist. Sei  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\Omega$ . Da für alle  $n$   $\omega_0^n$  in der endlichen Menge  $\{1, \dots, m\}$  liegt, muss ein  $\omega_0 \in \{1, \dots, m\}$  unendlich oft in  $\{\omega_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  vorkommen. Ein solches  $\omega$  wird als erstes Element der Teilfolge  $(\omega^{(n_i)})_{i \in \mathbb{N}}$  gewählt. Durch induktive Wiederholung erhalten wir eine Folge in  $\Omega$ , deren  $n$ 'te Folgenglieder jeweils auf den ersten  $n$  der jeweils ihrigen Folgengliedern übereinstimmen. Damit konvergiert diese Teilfolge  $(\omega^{(n_i)})_{i \in \mathbb{N}}$  in der Metrik  $d$  gegen einen Grenzwert in  $\Omega$ .  $\square$

Um nun von dem Folgenraum  $\Omega$  auf den Atraktor  $A$  abzubilden, also jede Folge  $\omega \in \Omega$  auf einen Punkt  $a \in A$ , wählt man im  $n$ 'ten Iterationsschritt jeweils die Funktion  $\phi_{\omega_n}$  aus dem iterierten Funktionensystem  $\Phi$  aus. Diese Abbildung ermöglicht die Codierung von Punkten des Atraktors durch Folgen.

Überraschenderweise müssen diese Funktionen nicht auf den gesamten Raum  $D$  angewandt werden, sondern es reicht aus, sie auf einen beliebigen Punkt  $x \in D$  anzuwenden. Das Folgende findet sich in [BD85], Abschnitt 2.2.

**Definition 2.9** (coding map). Sei  $\omega \in \Omega$  und  $\phi_{\omega|n}(x) := \phi_{\omega_1} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n}(x)$  sowie  $x \in D$  beliebig. Dann ist die coding map definiert als

$$\begin{aligned} \pi : \Omega &\rightarrow A \\ \omega &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\omega|n}(x) \end{aligned}$$

**Lemma 2.10.** Die coding map  $\pi$  ist stetig und bildet unabhängig von dem gewählten  $x \in D$  surjektiv auf den gesamten Atraktor  $A$  ab.

Für alle  $x \in D$  konvergiert die Iteration der Funktion  $\Phi(x) = \bigcup_{i=1}^m \phi_i(X)$  für einen beliebigen Startpunkt  $x$  in der Hausdorff-Metrik gegen den Atraktor  $A$

$$\Phi^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

*Beweis.* Für ein beliebigen Punkt  $x \in D$  sowie eine beliebige Folge  $\omega \in \Omega$  folgt aus der Konstruktion des Atraktors, dass der Wert der coding map

$$\pi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\omega|n}(x)$$

in dem Atraktor liegt. Sei  $\Phi$  das iterierte Funktionensystem und  $r_i$  die Skalierungen der Kontraktionen sodass

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq r_i |x - y|$$

für alle  $x, y \in D$  und  $\phi \in \Phi$ . Sei  $r := \max\{r_i\}$  der der langsamsten Kontraktion entsprechende Faktor.. Dann folgt aus wiederholter Anwendung der Kontraktionsbedingung

$$|\phi_{\omega|n}(x) - \phi_{\omega|n}(y)| \leq r^n \delta(D)$$

mit  $\delta(D) := \max\{|x - y| : x, y\} < \infty$ , und damit die Unabhängigkeit des Grenzwertes  $\pi(\omega)$  von dem gewählten Startpunkt  $x$ .

Um zu zeigen, dass  $\pi$  stetig ist, wählen wir ein  $\epsilon > 0$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ , sodass  $r^m \delta(D) < \epsilon$ . Man wähle zwei  $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$  für die gilt

$$d(\omega, \tilde{\omega}) \leq \frac{1}{2}^m$$

d.h. die mindestens auf den ersten  $m$  Stellen übereinstimmen. Die Stetigkeit von  $\pi$  folgt, da

$$\begin{aligned} |\pi(\omega) - \pi(\tilde{\omega})| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\omega|n}(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\tilde{\omega}|n}(x) \right| \\ &= \left| \phi_{\omega|m} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{(\omega_{n+m})_{n \in \mathbb{N}}|n}(x) \right) - \phi_{\tilde{\omega}|m} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{(\tilde{\omega}_{n+m})_{n \in \mathbb{N}}|n}(x) \right) \right| \\ &\leq r^m \delta(D) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Zuletzt ist zu zeigen, dass  $\pi$  surjektiv auf  $A$  abbildet. Sei also  $a \in A$  beliebig. Da wir wissen, dass sich  $A$  schreiben lässt als

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)$$

folgt auch  $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(D)$ . Damit muss für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten, dass  $a \in \Phi^n(D)$  ist. Daraus folgt, dass für alle  $n$  eine Folge  $\omega^{(n)} \in \Omega$  existiert, sodass gilt

$$a \in (\phi_{\omega_1^n} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n^n}) \left( \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^n(x) \right).$$

Man erhält also eine Folge  $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$ . Deren Folgenglieder, selbst wiederum Folgen in  $\{1, \dots, m\}$ , besitzen die Eigenschaft, dass jeweils die ersten  $n$  der ihrigen Folgenglieder der Beginn einer möglichen Folge sind, die ein  $x$  unter der coding map auf  $a$  abbilden würde.

Da  $\Omega$  kompakt ist, besitzt die Folge  $\omega^{(n)}$  eine Teilfolge  $\omega^{(n_i)}$ , die gegen ein  $\omega \in \Omega$  konvergiert. Da  $\pi$  stetig ist, konvergiert auch  $\pi(\omega^{(n_i)})$  gegen  $\pi(\omega) = a$ . Dass der Grenzwert nicht vom jeweiligen Startwert  $x$  abhängt wurde schon gezeigt.  $\square$

Die coding map  $\pi$  ist also eine surjektive Abbildung von  $\Omega$  auf  $A$ . Allerdings ist  $\pi$  im Allgemeinen nicht injektiv. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn sich die Bildmengen  $\phi_i(D)$  zweier Funktionen des IFS schneiden. Dann kann die Anwendung verschiedener Folgen von Funktionen gegen den selben Punkt in  $A$  konvergieren. Sind die Bilder jedoch disjunkt, dann ist die Darstellung eindeutig. Dies folgt, da die Mengen  $\phi_i(D)$  ebenfalls kompakt und damit abgeschlossen sind, weshalb sie mindestens einen Abstand von  $\epsilon$  haben müssen, sie 'berühren' sich also nicht.

## 2.2.1 Symbolische Dynamik

Eine natürliche Operation auf dem symbolischen Raum ist die Linksverschiebung, d.h. die Abbildung, die jedes Glied einer Folge  $\omega \in \Omega$  um eine Stelle nach links verschiebt

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mapsto (\omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots).$$

**Definition 2.11** (Linksverschiebung). *Wir bezeichnen als Linksverschiebung  $\sigma$  die Abbildung*

$$\sigma : \Omega \rightarrow \Omega, (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

Das Paar  $(\Omega, \sigma)$  wird auch als *symbolische Dynamik* bezeichnet.

**Lemma 2.12.** *Die Linksverschiebung  $\sigma$  ist stetig.*

*Beweis.* Seien  $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$  mit

$$d(\omega, \tilde{\omega}) \leq \frac{1}{2^n}$$

d.h.  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  stimmen auf den ersten  $n$  Stellen überein. Damit stimmen  $\sigma(\omega)$  und  $\sigma(\tilde{\omega})$  auf den ersten  $n - 1$  Elementen überein und es gilt

$$d(\sigma(\omega), \sigma(\tilde{\omega})) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

[PY98, Lemma 1.2]

□

Durch die Iteration der auch als *shift map* bezeichneten Abbildung  $\sigma$  auf  $\Omega$  erhält man ein diskretes dynamisches System, definiert durch das Tupel  $(\mathbb{N}, \Omega, \sigma)$ .

Die Linksverschiebung auf dem Raum  $\Omega$  korrespondiert zu der Anwendung des Urbilds unter dem iterierten Funktionensystem  $\Phi$  auf  $A$ . Ist die coding map jedoch nicht injektiv, ist das Inverse  $\Phi^{-1}$  nicht eindeutig bestimmt.

# Kapitel 3

## Maße auf dem Atraktor

Bei der Betrachtung dynamischer Systeme unter einem maßtheoretischem Gesichtspunkt ist man besonders an einem unter der Iteration *invarianten Maß* interessiert, d.h. an einem Maße  $\mu$ , für das gilt

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$$

für alle messbaren Mengen  $E$ . In diesem Kontext geht es darum, auf dem unter der Iteration invariantem Atraktor eines iterierten Funktionensystems ein ebenso invariantes Maß zu definieren. Dabei bietet es sich an,  $A$  als Repeller von  $f$  aufzufassen und ein Maß zunächst auf dem shift space zu definieren. So erhält man etwa auch das häufig verwendete Bernoulli Maß.

### 3.1 Das Bernoullimaß

**Definition 3.1** (Bernoulli Maß). Sei  $\{1, \dots, m\}$  die Indexmenge des IFS. Man wähle einen Vektor

$$p := (p_1, \dots, p_m)$$

mit

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

Durch den Vektor  $p$  wird also ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $p(i) = p_i$  auf der Indexmenge  $\{1, \dots, m\}$  definiert. Man bezeichnet mit  $\mathcal{P}$  den Raum aller dieser Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\{1, \dots, m\}$ . Das Bernoulli Maß auf einer Teilmenge  $[\omega_j, \dots, \omega_{j+n}]_j^{j+n} \subset \Omega$  ist dann definiert durch das Produkt des Maßes  $p$

$$\mu_p([\omega_1, \dots, \omega_n]_j^{j+n}) = \prod_{i=1}^n p_{\omega_i}$$

Dabei sind die Mengen  $[\omega_j, \dots, \omega_{j+n}]_j^{j+n} \subset \Omega$ , sogenannte *Zylinder*, dadurch definiert, dass sie jeweils alle Folgen  $\omega$  enthalten, deren Folgenglieder  $j$  bis  $j+n$  durch die genannten Werte festgelegt sind. Die Menge  $[1, 2]_1^2$  beispielsweise enthält alle Folgen, deren ersten Gliedern 1 und 2 sind. Je mehr Folgenglieder weiter festgelegt werden, desto kleiner wird die Menge derer Folgen, die diese

Eigenschaft erfüllen.

Zylinder der Form  $[\omega_1, \dots, \omega_n]_1^n$ , die die ersten  $n$  Stellen einer Folge festlegen, lassen sich bezüglich der Metrik  $d$  auf dem symbolischen Raum als offene Bälle mit Radius  $\frac{1}{2}^n$  um eine beliebige Folge  $\omega \in [\omega_1, \dots, \omega_n]_1^n$  auffassen. Daher bilden Zylinder eine Basis der durch die Metrik  $d$  induzierten Topologie auf  $\Omega$  und erzeugen folglich auch die Borel  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\Omega)$ . Es reicht daher aus, das Maß  $\mu_p$  auf allen Zylindern zu definieren, da es sich so auf ganz  $\mathcal{B}(\Omega)$  erweitern lässt.

Es gilt

$$\mu_p(\sigma^{-1}([\omega_j, \dots, \omega_{j+n}]_j^{j+n})) = \mu_p([\omega_j, \dots, \omega_{j+n}]_{j-1}^{j+n-1}) = \prod_{i=1}^n p_{\omega_i} = \mu_p([\omega_1, \dots, \omega_n]_1^{j+n}).$$

Damit ist  $\mu_p$  invariant unter der Linksverschiebung.

Auf dem Atraktor  $A$  definiert man das Bernoulli Maß dann mithilfe der coding map als

$$\nu_p = \pi_*(\mu_p).$$

### 3.1.1 Weitere invariante Maße

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass Bernoulli Maße, wenn auch die wichtigste, doch nicht die einzige Klasse shift-invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Atraktor eines IFS sind. Eine weitere Klasse solcher Maße lässt sich mithilfe eines unter der shift-map  $n$ -periodischen Punktes konstruieren, also eines Punktes  $\omega^{(n)} \in \Omega$  für den gilt

$$\sigma^n(\omega^{(n)}) = \omega^{(n)}. \quad (3.1)$$

Das *periodische-Orbit-Maß*  $\mu_{p,n}$  ist dann für eine Menge  $E \in \mathcal{B}(\Omega)$  definiert als

$$\mu_{p,n}(E) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\sigma^i(p)}(E) \quad (3.2)$$

wobei  $\delta_{\sigma^i(p)}$  das Dirac-Maß bezeichnet. Man sieht leicht, dass  $\mu_{p,n}$  nichtnegativ ist,  $\mu_{p,n}(\emptyset) = 0$  und  $\mu_{p,n}(\Omega) = 1$  gilt. Für eine abzählbare Menge disjunkter Mengen  $E_j \in \mathcal{B}(\Omega)$  gilt

$$\mu_{p,n}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\sigma^i(p)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{\sigma^i(p)}(E_j) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\sigma^i(p)}(E_j) \quad (3.5)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{p,n}(E_j) \quad (3.6)$$

wobei im vorletzten Schritt (1.9) verwendet wird, dass  $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{\sigma^i(p)}(E_j) \in \{0; 1\}$  ist, da die Mengen  $E_j$  disjunkt sind. Damit ist gezeigt, dass  $\mu_{p,n}$  tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$  ist. Die Invarianz unter der Linksverschiebung folgt aus

$$\mu_{p,n}(\sigma^{-1}(E)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\sigma^i(p)}(\sigma^{-1}(E)) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\sigma^{i+1}(p)}(E) \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{p-1} \delta_{\sigma^i(p)}(E) = \mu_{p,n}(E).$$

## 3.2 Pseudo-Bernoullimaß

In ihrer Arbeit [DS17] erweitern die Autoren die Klasse der Bernoullimaße auf  $\Omega$  auf eine weitere Klasse allgemein nicht mehr shift-invarianter Maße. Diese Maße werden genutzt, um eine Methode zur Berechnung der Hausdorffdimension zu entwickeln. Die Verallgemeinerung der einfachen Bernoullimaße wird ebenfalls über ein Produkt definiert, aber anstatt dafür ein festes Wahrscheinlichkeitsmaß  $p \in \mathcal{P}$  zu wählen betrachtet man eine Funktion

$$r : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}. \quad (3.7)$$

Für ein  $x > 0$  ist  $r(x)$  also ein Maß auf  $\{1, \dots, m\}$  und das Maß eines  $i \in \{1, \dots, m\}$  bezeichnen wir mit  $(r(x))_i$ . Für ein  $\lambda > 0$  nennt man eine solche Funktion *exponentiell  $\lambda$ -periodisch*, wenn für alle  $x \in (0, \infty)$  gilt  $r(\lambda x) = r(x)$ . Für ein konsistentes Verhalten im Grenzwert  $\lambda \searrow 1$  definiert man eine *exponentiell 1-periodische* Funktion als konstant. Die Menge der exponentiell  $\lambda$ -periodischen Funktionen wird mit  $\mathcal{R}_\lambda$  bezeichnet und mit  $\mathcal{R} = \bigcup_{\lambda \geq 1} \mathcal{R}_\lambda$  deren Vereinigung.

**Definition 3.2** (Das pseudo-Bernoullimaß). *Das pseudo-Bernoullimaß auf einem Zylinder  $[\omega_1, \dots, \omega_n]_j^{j+n} \subset \Omega$  ist für ein  $r \in \mathcal{R}$  definiert als*

$$\mu_r([\omega_1, \dots, \omega_n]_j^{j+n}) = \prod_{i=1}^n (r(i))_{\omega_i} \quad (3.8)$$

Um ein Maß auf dem Atraktor zu erhalten, wird wieder der pushforward des Maßes  $\mu_r$  unter der coding map verwendet:

$$\nu_r = \pi_*(\mu_r).$$

**Beispiel 3.3.** Ein  $\lambda$ -periodisches Pseudo-Bernoullimaß auf  $\Omega$  ist gegeben durch die Funktionen

$$\begin{aligned} r(1)_{\omega_i} &= 1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \log \omega_i\right) \\ r(2)_{\omega_i} &= \dots = r(m)_{\omega_i} = \frac{1 - r(1)_{\omega_i}}{m - 1}. \end{aligned}$$

Wählt man die Funktion  $r$  als konstant, erhält man das Produktmaß eines einzigen Wahrscheinlichkeitsmaßes auf  $\{1, \dots, m\}$  und damit ein Bernoullimaß. Die Bernoullimaße sind also eine Teilmenge der pseudo-Bernoullimaße. Diese sind aber im allgemeinen nicht shift-invariant.



## Kapitel 4

# Graphische Darstellung durch das Chaos Game

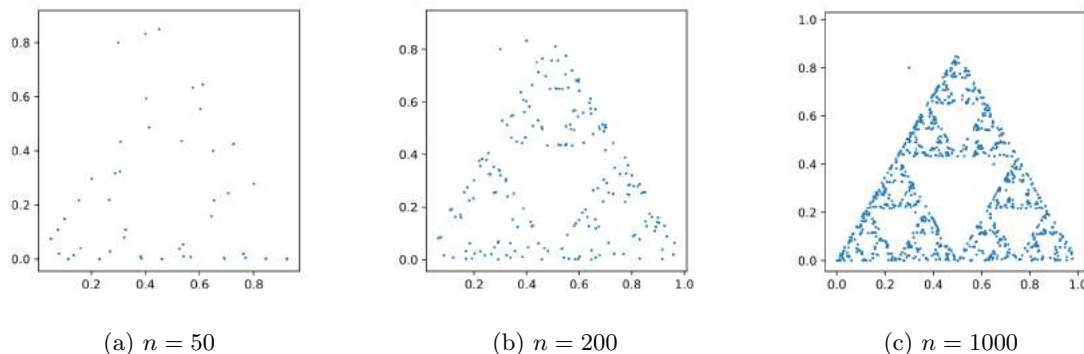
Eine andere Möglichkeit, den Atraktor eines iterierten Funktionensystems graphisch darzustellen, ist das sogenannte *chaos game*. Dieser Algorithmus beginnt mit einem beliebigen Punkt  $x \in D$ , auf welchen in jedem Iterationsschritt eine zufällig gewählte Funktion  $\phi_i$  aus dem iterierten Funktionensystem  $\Phi$  angewendet wird. Der so erhaltene neue Punkt dient im nächsten Schritt als Startwert. Plottet man die so erhaltene Menge von Punkten in  $D$ , so zeigt sich eine mit zunehmender Anzahl der durchgeführten Iterationen immer genauere Approximation des Atraktors des IFS.

Dies gilt unabhängig davon, ob der gewählte Startwert selbst im Atraktor liegt oder nicht. Tut er das nicht, liegen oft auch einige der ersten Punkte erkennbar außerhalb des Atraktors. Die folgenden Iterationen nähern sich dem Atraktor aber immer mehr an, es fallen keine Punkte mehr weit außerhalb des Atraktors und jeder Punkt des Atraktors wird mit zunehmender Anzahl der Iterationen beliebig genau approximiert.

Ein bekanntes Beispiel ist das *Sierpinski-dreieck*. Dieses wird durch das iterierte Funktionensystem  $\Phi$  auf  $D = [0, 1]^2$  bestehend aus den Funktionen

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1, x_2) \\ \phi_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1, x_2) + (0, 1) \\ \phi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1, x_2) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)\end{aligned}$$

erzeugt und besteht aus ineinander verschachtelten gleichseitigen Dreiecken. Die folgenden Plots zeigen die Iterationen eines beliebigen Startpunktes unter einer dieser in jedem Schritt erneut zufällig ausgewählten Funktionen.



Da der Startpunkt nicht in dem Atraktor liegt, erscheint der Plot von nur 50 Iterationen weitgehend chaotisch und ohne Struktur. Bei 200 Iterationen ist die Form bereits klarer erkennbar, allerdings sind einige Bereiche des Atraktors noch nicht mit Punkten gefüllt und eine erkennbare Anzahl von Punkten liegt deutlich außerhalb des Atraktors. Erhöht man die Anzahl der Iterationen weiter, zum Beispiel auf 1000, wird der Atraktor klar und vollständig erkennbar und nur sehr wenige Punkte liegen erkennbar außerhalb.

## 4.1 Konvergenz

Wir wollen diesen Prozess nun formalisieren. Man betrachtet das chaos game für einen beliebigen Startpunkt  $x_0 \in D$ . Dabei bezeichnet  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  die Menge aller durch den obigen Algorithmus erzeugten Punkte mit  $x_{n+1} = \phi_i(x_n)$  für ein in jedem Schritt zufällig gewähltes  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Die beschriebene Konvergenzeigenschaft des Verfahrens entspricht der Konvergenz der Menge  $\{x_n\}_{n=N}^\infty$  gegen  $A$  für  $N \rightarrow \infty$  in der bereits erwähnten Hausdorff-Metrik  $d_{\mathcal{D}}$  auf dem Raum kompakter Teilmengen von  $D$ .

**Satz 4.1** (Konvergenz des Chaos Game). *Sei  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  die Menge der durch eine beliebige Realisierung des chaos game für einen beliebigen Startpunkt  $x_0 \in D$  erzeugten Punkte. Sei  $\mu$  das Bernullimaß auf  $\Omega$ , definiert durch gleiche Wahrscheinlichkeiten  $p_i = \frac{1}{m}$  für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Dann gilt  $\mu$ -fast sicher, dass für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass*

$$d_{\mathcal{D}}(\overline{\{x_n\}_{n=N}^\infty}; A) \leq \epsilon.$$

*Beweis.* Wir wollen für alle  $\epsilon > 0$  und ein  $N$  zeigen, dass fast sicher

$$d_{\mathcal{S}}(\overline{\{x_n\}_{n=N}^\infty}; A) := \inf\{\delta : A \subset \overline{\{x_n\}_{n=N}^\infty}_{\delta} \text{ und } \overline{\{x_n\}_{n=N}^\infty} \subset A_{\delta}\} \leq \epsilon. \quad (4.1)$$

Für den Beweis wollen wir die Darstellung durch die coding map nutzen. Wir haben die coding map als Abbildung von dem Folgenraum  $\Omega$  auf den Atraktor  $A$  definiert als die Verknüpfung einer endlichen Zahl der ersten  $n$  durch die Folgenglieder  $\omega_n$  bezeichneten Funktionen  $\phi_{\omega_i}$  im Limes  $n$  gegen  $\infty$ . Es bietet sich daher an, diese Definition auf endliche Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  zu erweitern, indem man lediglich auf den Limes  $n \rightarrow \infty$  verzichtet und die Verknüpfung von  $n$  Funktionen betrachtet.

Sei also  $\Omega_n := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, m\}\}$  die Menge aller  $n$ -Tupel in der Indexmenge des iterierten Funktionensystems. Wir erweitern den Folgenraum  $\Omega$  nun um alle endlichen Tupel:

$$\tilde{\Omega} := \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n}$$

mit  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ . Die coding map  $\pi$  lässt sich auf den Raum  $\tilde{\Omega}$  natürlich erweitern durch

$$\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow D$$

$$\omega \mapsto \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\omega_1} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n}(x) & \omega \in \Omega \\ \phi_{\omega_1} \circ \dots \circ \phi_{\omega_n}(x) & \omega \in \Omega_n \end{cases}$$

Die Bildmenge von  $\pi$  ist jetzt aber nicht mehr nur der Attraktor  $A$ , sondern liegt nun allgemein in  $D$ . Die Metrik  $d$  lässt sich ebenso leicht von  $\Omega$  auf  $\tilde{\Omega}$  verallgemeinern, indem man die maximale Übereinstimmung von zwei Elementen in  $\tilde{\Omega}$  auch auf einer endlichen Zahl von Folgengliedern betrachtet. Die Abbildung  $\pi$  ist weiterhin stetig. Daher kann man, statt (4.1) in dem Raum  $D$  zu betrachten, die analoge Aussage in der symbolischen Darstellung untersuchen. Es ist hierbei zu zeigen, dass für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N$  existiert, sodass fast sicher gilt:

$$\inf\{\delta : \Omega \subset (\{\tilde{\omega}^{(n)}\}_{n=N}^{\infty})_{\delta} \text{ und } \{\tilde{\omega}^{(n)}\}_{n=N}^{\infty} \subset \Omega_{\delta}\} \leq \epsilon,$$

wobei  $\pi(\Omega) = A$  und  $\pi(\{\tilde{\omega}^{(n)}\}_{n=N}^{\infty}) = \{x^{(n)}\}_{n=N}^{\infty}$  ist. Zunächst zeigen wir  $\{\tilde{\omega}^{(n)}\}_{n=N}^{\infty} \subset \Omega_{\epsilon}$  für alle  $\epsilon > 0$  und ein ausreichen großes  $N$ . Sei also  $\tilde{\omega}^{(n)} \in \tilde{\Omega}$  für  $n \geq N$  ein beliebiges  $n$ -Tupel. Dann existiert eine Folge  $\omega \in \Omega$ , die auf den ersten  $n$  Folgengliedern mit dem  $n$ -Tupel  $\tilde{\omega}^{(n)}$  übereinstimmt. Es gilt also

$$d(\tilde{\omega}^{(n)}; \omega) \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \epsilon.$$

Sei nun  $\omega \in \Omega$  eine beliebige Folge. Nun ist zu zeigen, dass für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N$  existiert, sodass es  $\mu$ -fast sicher ein ein  $n$ -Tupel  $\tilde{\omega}^{(n)}$  mit  $n \geq N$  gibt, dass wiederum gilt

$$d(\tilde{\omega}^{(n)}; \omega) \leq \epsilon. \tag{4.2}$$

Dafür muss es  $\mu$ -fast sicher für alle  $N$  ein  $n \geq N$  geben, sodass das Tupel  $\tilde{\omega}^{(n)}$  auf mindestens den ersten  $N$  Stellen mit der gewählten Folge  $\omega$  übereinstimmt.

Ein neues Folgenglied  $\tilde{\omega}^{(n+1)}$  der Folge  $(\tilde{\omega}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  wird erzeugt, indem ein neues zufällig gewähltes Element aus  $\{1, \dots, m\}$  an der ersten Stelle eingefügt und alle weiteren Elemente eine Stelle nach links verschoben werden. Wir betrachten die Teilfolge  $(\tilde{\omega}^{(iN)})_{i \in \mathbb{N}}$  bestehend aus den  $N$ 'ten Elemente. Sei  $E_i$  das Ereignis, dass das Tupel  $\tilde{\omega}^{(iN)}$  auf den ersten  $N$  Stellen mit der Folge  $\omega$  übereinstimmt. Die Ereignisse  $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$  sind offensichtlich stochastisch unabhängig und besitzen jeweils alle das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu(E_i) = \frac{1}{m}.$$

Damit gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^N = \infty.$$

Daraus folgt mit dem Lemma von Borel-Cantelli, dass

$$\mu(\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i) = 1.$$

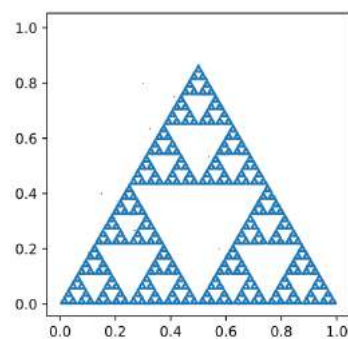
Dies bedeutet, dass bei unendlicher Wiederholung ein  $\tilde{\omega}^{(n)}$ , welches auf den ersten  $N$  Stellen mit  $\omega$  übereinstimmt, mit Wahrscheinlichkeit 1 sogar unendlich oft auftritt. Dieses  $\tilde{\omega}^{(n)}$  erfüllt

$$d(\tilde{\omega}^{(n)}; \omega) \leq \epsilon. \quad (4.3)$$

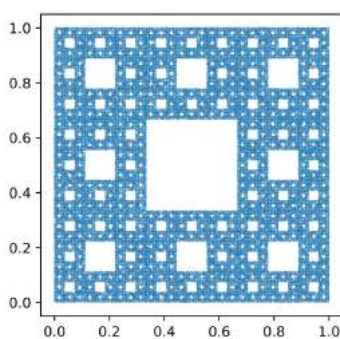
Daraus folgt die ursprüngliche Behauptung.  $\square$

### 4.1.1 Implementierung mit *Python*

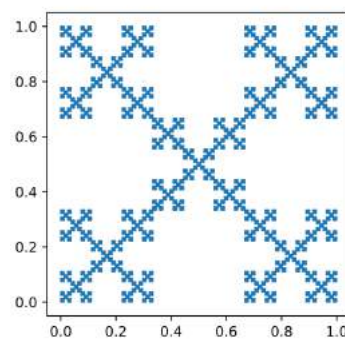
Die Abbildung zeigt Beispiele dreier Atraktoren, die durch das chaos game mit einer hohen Zahl von 100000 Iterationen visualisiert wurden. Neben dem bereits erwähnten Sierpinski dreieck (d) ist der Sierpinski teppich (e) abgebildet, der durch ein IFS von 8 selbstähnlichen Kontraktionen mit Kontraktionsfaktor  $\frac{1}{3}$  erzeugt wird sowie ein weiteres Fraktal (f) erzeugt durch eine etwas andere Anordnung von 5 solcher Kontraktionen.



(d) Sierpinski dreieck



(e) Sierpinski teppich



(f) Atraktor erzeugt durch fünf Funktionen mit  $r = \frac{1}{3}$

Für eine Implementierung des chaos game zur Darstellung von Atraktoren in zwei Dimensionen eignet sich *Python* gut. Die eben gezeigten und weitere Beispiele sind mit Python realisiert. Die  $x$ - und  $y$ -Koordinate sind in einem Array gespeichert, das mit einem beliebigen Wertepaar initialisiert wird. Für die Berechnung der weiteren Punkte verwendet man eine Schleife mit der gewünschten Anzahl der Iterationen, die in jedem Durchlauf zufällig eine der Funktionen  $\phi_i$  auswählt und auf die jeweils letzten Werte des Arrays anwendet. Die so erhaltenen neuen  $x$ - und  $y$ -Koordinaten werden dem Array hinzugefügt. Ist die Schleife durchgelaufen werden alle Punkte des Arrays geplottet.

Für das chaos game muss in jedem Schritt nur das Bild eines einzigen Punktes berechnet werden und die Anzahl der Operationen skaliert nur linear mit der Zahl der Iterationen. Dies ermöglicht es, sehr viele Iterationen zu verwenden um eine gute Approximation des Atraktors zu erhalten.

Die gleiche Methode ließe sich auch auf den dreidimensionalen Fall anwenden. Ein dreidimensionaler Plot von vielen tausenden Punkten ist jedoch sehr unübersichtlich und macht es schwer, die Struktur des Atraktors zu erkennen. Daher ist OpenSCAD, das klare geometrische Formen verwendet und einen Schattenwurf simulieren kann, für dreidimensionale Objekte besser geeignet.

## 4.2 Ergodizität

Durch eine Modifikation des chaos game lässt sich die Dichte eines Bernoullimaßes auf einem Atraktor visualisieren. Dazu wählt man in jedem Schritt nicht mehr eine der Funktionen  $\phi_1, \dots, \phi_m$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit, sondern jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$ .

Entsprechend sind die Punkte der Iteration nicht mehr gleichmäßig über den Atraktor verteilt, sondern häufen sich entsprechend der Wahrscheinlichkeiten in der Nähe jener Punkte des Atraktors, gegen die die Iteration der jeweiligen Funktionen einzeln konvergieren würde.

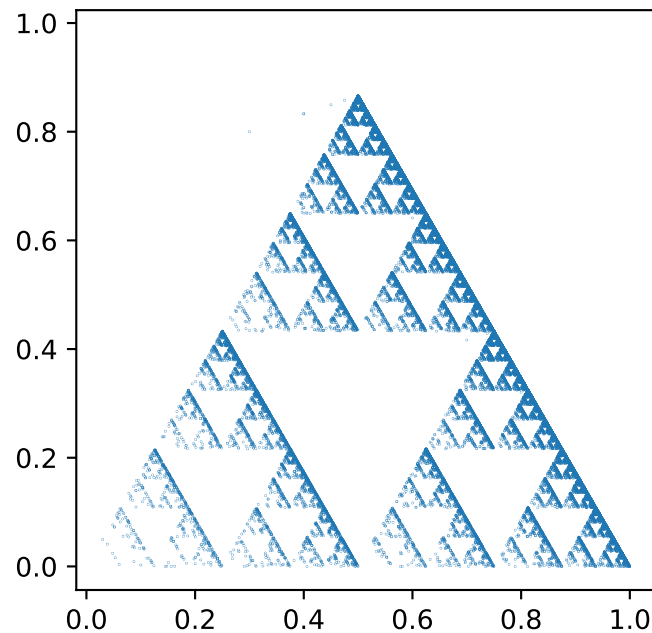


Abbildung 4.1: Visualisierung der Dichte eines Bernoullimaßes auf dem Sierpinski-dreieck, welches durch den Vektor  $(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2})$  definiert ist.

Umgekehrt führt die Zuordnung der gleichen Wahrscheinlichkeit für alle Funktionen zu einer gleichmäßigen Verteilung der Punkte über den ganzen Atraktor. Diese Eigenschaft ist entscheidend dafür, dass auch die endliche Ausführung des chaos game tatsächlich eine gute Approximation des Atraktors liefert.

Um den Zusammenhang zwischen der mittleren Dichte der durch das chaos game erzeugten Punkte in einer bestimmten Teilmenge und deren Bernoullimaß genauer zu betrachten, benötigt man den Begriff der Ergodizität. [PY98] behandelt dieses Thema in Kapitel 9 und 10.

**Definition 4.2** (Ergodizität). Sei  $(X, T)$  mit  $T : X \rightarrow X$  ein dynamisches System und  $(X, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie das Maß  $\mu$   $T$ -invariant. Dann heißt das Maß ergodisch, wenn

für alle  $T$ -invarianten Mengen  $B \in \mathcal{B}$  mit  $\sigma(B) = B$  gilt, dass entweder  $\mu(B) = 0$  oder  $\mu(B) = 1$  ist.

Anschaulich betrachtet ist ein dynamisches System also ergodisch, wenn es sich, abgesehen von Nullmengen, nicht in mehrere abgeschlossene Teilsysteme zerlegen lässt. Ist ein System ergodisch, lassen sich einige mächtige Aussagen treffen.

In diesem Fall benötigt man zunächst einen Weg, die Anwendung des chaos game auf einen Punkt auf dem Atraktor als ein ergodisches dynamisches System zu verstehen. Auf dem Raum  $\Omega$  betrachtet besteht ein Iterationsschritt darin, alle Folgenglieder einer Folge  $\omega^{(n)}$  eine Stelle nach rechts zu verschieben und ein neues, zufällig gewähltes erstes Folgenglied einzufügen, also

$$(\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots) \mapsto (i, \omega_1^{(n)} \omega_2^{(n)}, \dots) =: (\omega_1^{(n+1)}, \omega_2^{(n+1)}, \dots)$$

mit einem zufälligen  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Diese etwas umständliche Darstellung ist nötig, da der Folgenraum  $\Omega$  nur einseitige Folgen enthält. Man kann allerdings auch annehmen, das  $\Omega$  beidseitige Folgen  $\{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$  enthalte während die coding map weiterhin nur die Folgenglieder  $\omega_n$  mit  $n \geq 1$  betrachtet. In diesem Rahmen kann man eine rechtsseitige Folge, die über die coding map einen Punkt  $a \in A$  bezeichnet, beliebig durch zufällige Folgenglieder nach links vorgesetzt denken. Ein Iterationsschritt des chaos game entspricht dann der Verschiebung einer solchen beidseitigen Folge um eine Stelle nach rechts, also des Inversen shift map  $\sigma^{-1}$ :

$$\sigma^{-1} : (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (\omega_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}} \tag{4.4}$$

**Lemma 4.3.** Sei  $(X, T)$  ein dynamisches System und  $\mu$  ein  $T$ -invariantes Maß auf  $X$ . Dann ist  $\mu$  genau dann ergodisch, wenn für alle messbaren Mengen  $A, B \subset X$  gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \tag{4.5}$$

*Beweis.* Sei (4.5) erfüllt. Sei  $C \subset X$  eine messbare Menge, die invariant unter  $T$  ist, für die also gilt

$$T^{-1}C = C$$

Man wähle in der Formel (4.5) die Mengen  $A$  und  $B$  beide gleich  $C$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \mu(C)^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}C \cap C) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(T^{-n}C \cap C) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(C) \\ &= \mu(C) \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\mu(C) \in \{0, 1\}$  und damit die Ergodizität des Maßes  $\mu$ . Die Gegenrichtung folgt direkt aus dem Satz von Von Neumann, ist hier aber nicht relevant.  $\square$

Mithilfe dieses Lemmas lässt sich leicht sehen, dass die Verschiebung nach Rechts auf dem beidseitigen Folgenraum ergodisch ist: Es wurde bereits gezeigt, dass das Bernoullimaß invariant unter der shift map ist. Es ist wiederum ausreichend, (4.5) für Zylinder der Form  $[\omega_1, \dots, \omega_n]_j^{j+n} \subset \Omega$  zu zeigen, die die Borell- $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  erzeugen.

Seien also  $A = [\omega_1, \dots, \omega_m]_i^{i+m}$  und  $B = [\omega_1, \dots, \omega_k]_j^{j+k}$  zwei Zylinder. Man sieht leicht, dass für alle  $n > (j+k) - i$  die Mengen  $\sigma^n A$  und  $B$  disjunkt sind. Damit gilt für alle solche  $n$

$$\mu(\sigma^n A \cap B) = \mu(\sigma^n A)\mu(B) = \mu(A)\mu(B).$$

Daraus folgt im Limes (1.5) und die Ergodizität. Dies erlaubt es nun, ein wichtiges Ergebnis aus der Ergodentheorie anzuwenden.

**Satz 4.4** (Birkoffscher Ergodensatz). *Sei  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  und  $\mu$  ergodisch. Dann gilt für  $\mu$ -fast alle  $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\sigma^n(\omega)) = \int_{\Omega} f d\mu. \quad (4.6)$$

[PY98, Theorem 10.2]

Anders ausgedrückt besteht die Aussage des Birkoffschen Ergodensatzes darin, dass unter den genannten Voraussetzungen der durchschnittliche Wert einer Funktion  $f$  entlang einem Orbit über unendlich viele Iterationsschritte dem durchschnittlichen Wert der Funktion auf dem gesamten Raum gewichtet mit dem ergodischen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  entspricht. Die Ergodizität liefert also eine Verbindung zwischen dem dynamischen System und einem dazu passenden Wahrscheinlichkeitsmaß.

Mit dieser Vorarbeit lässt sich nun bestimmen, wie oft im die Iteration des chaos game im Durchschnitt in einer bestimmten Teilmenge  $U$  des Atraktors liegt, sofern der Startpunkt  $\omega$  ebenfalls im Atraktor liegt. Dafür wählt man die Funktion  $f$  im Birkoffschen Ergodensatz als  $f = \mathbb{1}_U$  und  $\sigma^{-1}$  als Iterationsvorschrift  $T$  und erhält das folgende Ergebnis.

**Lemma 4.5** (Mittlere Häufigkeit beim chaos game). *Sei  $\mu$  ein Bernoullimaß auf  $\Omega$  und  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{1 \leq n \leq N : \sigma^n(\omega) \in U\} = \mu(U). \quad (4.7)$$

Die mittlere Häufigkeit, mit der die Menge  $U$  durch das chaos game besucht wird, entspricht also gerade dem Bernoullimaß dieser Menge. Diese Überlegungen gelten allerdings nur, wenn der Startpunkt selbst bereits in dem Atraktor liegt. Tut er das nicht, sondern liegt allgemein in  $D$ , wird auch keine Iteration dieses Punktes im Atraktor selbst liegen, sich diesem aber aufgrund der Kontraktionseigenschaft der iterierten Funktionen wie bereits gezeigt beliebig annähern:

$$|\phi_{\omega|n}(x) - \phi_{\omega|n}(y)| \leq r^n \delta(D).$$

Damit gibt es für alle  $\delta > 0$  ein  $n$ , sodass der weitere Orbit nur noch höchstens  $\delta$  von dem eines Punktes in  $A$  unter der Anwendung der selben Folge von Funktionen entfernt liegt. Daraus folgt mit (4.7), dass die Iteration eines solchen Punktes mit einer relativen Häufigkeit von mindestens  $\mu(U)$  in einer Umgebung  $U_\delta$  von  $U$  in  $D$  liegt. Näherungsweise gilt (4.7) also auch für beliebige Startpunkte des chaos game.

# Kapitel 5

## Die Hausdorffdimension

### 5.1 Konstruktion der Hausdorffdimension

Das  $n$ -dimensionale Lebesgue-Maß misst Volumen beziehungsweise Flächen von Objekten ganzzahliger Dimension. Dabei liefert für ein  $n$  dimensionales Objekt nur das  $n$ -dimensionale Lebesgue-Maß einen endlichen Wert. So ist beispielsweise das eindimensionale Lebesgue-Maß, also die Länge, einer Fläche unendlich und das dreidimensionale Maß, also das Volumen, gleich null. Für eine fraktale Menge wie die eingangs erwähnte Cantor-Menge zeigt sich ein ähnliches Verhalten. Die Cantor-Menge ist konjugiert zu dem überabzählbaren symbolischen Raum  $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$  und ist damit ebenfalls Überabzählbar und besitzt ein unendliches null-dimensionales Lebesgue-Maß. In jeder Iteration besitzt die Approximation  $\Phi^n([0, 1])$  aber das eindimensionale Lebesgue-Maß  $\frac{2}{3}^n \rightarrow 0$ , womit mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt, dass die Cantormenge eine Nullmenge des eindimensionalen Lebesgue-Maßes ist. Daher stellt sich die Frage, ob ein auf nicht ganzzahlige Dimensionen verallgemeinertes Lebesgue-Maß für eine Dimension zwischen Null und Eins der Cantor-Menge ein endliches Maß zuordnet. Ein solches Maß ist das *Hausdorff Maß*.

**Definition 5.1** (Hausdorff Maß). *Für eine Menge  $F \subset \mathbb{R}^N$  nennt man eine abzählbare Familie von Mengen  $\{U_i\}$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $F$ , wenn  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  und für alle  $i$  gilt  $\text{diam}(U_i) \leq \delta$ . Wir definieren für ein  $s, \delta \geq 0$ :*

$$\mathcal{H}_{\delta}^s(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta \text{ Überdeckung von } F \right\}$$

*Da sich die Zahl der möglichen Überdeckungen für ein kleineres  $\delta$  reduziert, fällt das Infimum nicht und der Grenzwert  $\delta \rightarrow 0$  existiert. Das  $s$ -dimensionale Hausdorff Maß ist daher definiert als*

$$\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(F)$$

Für ganzzahlige Dimensionen  $s$  entspricht das Hausdorff-Maß jeweils dem  $s$ -dimensionalen Lebesgue-Maß. Ein  $n$ -dimensionaler offener Ball lässt sich nur durch  $\delta$ -Bälle überdecken, deren gemeinsames Volumen  $\sum_i \delta_i^n$  mindestens dem des ursprünglichen Balls entspricht. Das es sich auch für allgemeine Dimensionen wie ein Volumen verhält zeigt sich im Verhalten des Hausdorff-Maßes unter Skalierung. Für eine ganzzahlige Dimensionen  $n$  skaliert das Volumen, beziehungsweise die Fläche



oder Länge einer Menge mit  $\lambda^n$  für eine Skalierung um ein  $\lambda > 0$ . Das gleiche Verhalten zeigt das Hausdorff-Maß für beliebige Dimensionen.

**Lemma 5.2** (Skalierungseigenschaft des Hausdorff-Maßes). *Sei  $f : D \rightarrow D$  eine Ähnlichkeit mit Skalierungsfaktor  $\lambda > 0$  und  $F \subset D$ . Dann gilt*

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \quad (5.1)$$

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $F$ . Dann gilt

$$|f(F \cap U_i)| \leq \lambda |F \cap U_i| \leq |U_i| \leq \lambda \delta.$$

Damit ist  $\{f(F \cap U_i)\}$  eine  $\lambda\delta$ -Überdeckung von  $f(F)$ . Damit ist  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^s \leq \lambda^s \sum_i |U_i|^s$  und es folgt  $\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(f(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Im Grenzwert  $\delta \rightarrow 0$  folgt

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \quad (5.2)$$

Im Fall einer Ähnlichkeitstransformation erhält man die Gleichheit, indem man die selbe Aussage auch für die inverse Transformation  $f^{-1}$  betrachtet.  $\square$

Damit ist auch das Hausdorff-Maß invariant unter Rotation und Translation, was von einem Maß für das Volumen einer Menge ebenfalls zu erwarten ist.

Man beobachtet, dass sowohl  $\mathcal{H}_\delta^s$  als folglich auch  $\mathcal{H}^s$  für ein  $\delta < 1$  nicht wachsend in  $s$  sind. Darüber hinaus gilt für ein  $t > s$  und eine  $\delta$ -Überdeckung  $\{U_i\}$  einer Menge  $F$ :

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

und damit

$$\mathcal{H}_\delta^t \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s$$

Im Grenzwert  $\delta \rightarrow 0$  folgt daraus, dass, wenn für ein bestimmtes  $s$  gilt  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , dass dann  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  für alle  $t > s$  gelten muss. Folglich kann  $\mathcal{H}^s(F)$  nur für ein bestimmtes  $\tilde{s} \geq 0$  einen endlichen Wert annehmen und beträgt für kleinere Werte von  $s$  unendlich sowie für größere  $s$  Null. Die Existenz einer solchen Sprungstelle des Hausdorffmaßes motiviert zu der folgenden Definition:

**Definition 5.3** (Hausdorff-Dimension). *Die Hausdorff Dimension einer Menge  $F \subset \mathbb{R}^n$  ist definiert als*

$$\dim_H(F) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Die Hausdorff-Dimension einer Menge ist also genau der Parameter  $s$ , bei welchem der Sprung des Hausdorffmaßes dieser Menge von  $\infty$  auf 0 erfolgt.

Die Hausdorff-Dimension erfüllt eine Reihe von Elementaren Eigenschaften, die man auch von einem Begriff der Dimension erwarten würde und die für Abschätzungen nützlich sein können.

Die Hausdorffdimension ist *monoton*. Das heißt, für zwei Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  mit  $A \subset B$  ist auch  $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ . Dies folgt aus den Maßeigenschaften des zugrundeliegenden Hausdorff-Maßes, für das gilt  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$ .

Ist  $\{F_i\}$  eine abzählbare Menge von Teilmengen  $F_i \subset \mathbb{R}^n$ , dann ist folglich  $\dim_H \bigcup_j F_j \geq \dim_H F_i$  für alle  $i$ . Sei nun  $s \geq \dim_H F_i$  für alle  $i$ , dann ist  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$  und damit  $\mathcal{H}^s(\bigcup_i F_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^s(F_i) = 0$ .

Damit folgt, dass für die *Dimension der Vereinigungen* gilt  $\dim_H(\bigcup_i F_i) = \sup_i \{\dim_H F_i\}$ .

Da das Hausdorff-Maß eines offenen Balls im  $\mathbb{R}^n$  seinem (Lebesgue)-Volumen entspricht, also endlich und nicht Null ist, folgt, dass die Hausdorff-Dimension eines solchen Balls gleich  $n$  ist. Damit ist die Hausdorff-Dimension einer offenen Menge größer-gleich  $n$ .

Daraus folgt, dass der Raum  $\mathbb{R}^n$  Dimension  $n$  besitzt, da er abzählbar durch offene Mengen überdeckt werden kann.

Schlussendlich besitzen so auch allgemeine offene Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , da sie einen offenen Ball enthalten, die Hausdorff-Dimension  $n$ .

**Beispiel 5.4** (Cantor-Menge). Mit dieser Definition und mit Hilfe von Lemma 5.2 lässt sich die Hausdorff-Dimension der Cantormenge nun zumindest heuristisch bestimmen. Dazu kann man beobachten, dass sich die Cantormenge  $A$  in zwei selbstähnliche Stücke unterteilen lässt, nämlich  $A_L = A \cap [0, \frac{1}{3}]$  und  $A_R = A \cap [\frac{2}{3}, 1]$ . Man sieht leicht, dass beide Hälften eine um den Faktor  $\frac{1}{3}$  verkleinerte Kopie der ursprünglichen Menge sind und  $A = A_L \cup A_R$  die disjunkte Vereinigung ist. Damit gilt mit Lemma 5.2

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A_L) + \mathcal{H}^s(A_R) = \frac{1}{3}^s \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{3}^s \mathcal{H}^s(A).$$

Nun muss angenommen werden, dass das Hausdorff-Maß endlich ist, also  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$  gilt. Dies ist hier noch nicht klar, ist aber zumindest naheliegend. Dann kann man durch  $\mathcal{H}^s(A)$  teilen und erhält mit  $s = \dim_H(A) = \frac{\log 2}{\log 3}$  wie bereits vermutet einen Wert zwischen Null und Eins. Der noch nachfolgende Satz 6.5 wird diese Überlegung bestätigen und das gleiche Ergebnis liefern.

[vergl. [Fal14] S.47 ff]

## 5.2 Einfache Abschätzungen

**Lemma 5.5** (Obere Schranke der Hausdorffdimension). *Wenn für den Atraktor  $A$  eine Folge von Überdeckungen aus je  $n_k$  Elementen mit einem Durchmesser von höchstens  $\delta_k$  existiert, sodass  $\delta_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , dann gilt für die Dimension von  $A$ :*

$$\dim_H(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log n_k}{\log \delta_k}$$

*Beweis.* Es gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(A) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ ist eine } \delta \text{ Überdeckung von } F \right\} \\ &\leq \sum_{\{n_k\}} \delta_k^s \\ &= n_k \delta_k^s. \end{aligned}$$

Da der Atraktor  $A$  in den  $\mathbb{R}^n$  eingebettet ist, ist die Hausdorffdimension von  $A$  durch  $n$  beschränkt und das Volumen eines Balls skaliert mit dem Radius in einer endlichen Potenz. Daher existiert ein  $s$ , sodass der Ausdruck  $n_k \delta_k^s$  für alle  $k$  beschränkt ist, also das gilt

$$n_k \delta_k^s \leq c.$$

Durch Umstellung folgt daraus

$$s \leq \frac{\log c}{\log \delta_k} - \frac{\log n_k}{\log \delta_k}.$$

Im Limes  $\delta_k \rightarrow 0$  verschwindet der erste Term und es  $\mathcal{H}^s(A)$  ist beschränkt für

$$s \leq \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log n_k}{\log \delta_k}.$$

Daraus folgt  $\dim_H(A) \leq s$  für ein solches  $s$  und

$$\dim_H(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\log n_k}{\log \delta_k}.$$

□

**Lemma 5.6** (Massenverteilungs-Prinzip). *Sei  $\mu$  ein Maß auf  $A$  und für ein  $s > 0$  seien  $c > 0$  und  $\epsilon > 0$ , sodass*

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

für alle offenen Mengen  $U \subset A$  mit  $|U| \leq \epsilon$ . Dann ist  $\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{c}$  und

$$\dim_H(A) \geq s.$$

*Beweis.* Sei  $\{U_i\}$  eine beliebige Überdeckung von  $A$ , dann gilt

$$0 < \mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s.$$

Daraus folgt, nach Beachtung des Infimums,  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{c}$  sowie auch  $\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{c}$ . Da so dass  $s$ -dimensionale Hausdorff-Maß von  $A$  nicht gleich 0 ist folgt, dass  $\dim_H(A) \geq s$ . □

### 5.3 Dynamische Dimension

Definiert man auf einem Atraktor ein Maß, ist man häufig an der Dimension des Support des Maßes interessiert und möchte Nullmengen vernachlässigen.

**Definition 5.7** (Hausdorff Dimension eines Maßes).

$$\dim_H(\mu) := \inf\{\dim_H(E) : E \in \mathcal{B}(A) \text{ und } \mu(E) > 0\}$$

Da das Infimum über die Dimensionen von Teilmengen von  $A$  betrachtet wird, sieht man unmittelbar, dass für alle Maße  $\mu$  auf  $A$  immer gilt

$$\dim_H(\mu) \leq \dim_H(A). \tag{5.3}$$

Gilt Gleichheit, sagt man, das Maß habe volle Dimension. Maße voller Dimension sind oft von besonderem Interesse, da sie, wenn sie die Dynamik auf dem Atraktor in gewisser Weise fast vollständig, d.h. bis auf eine Nullmenge beschreiben und diese Nullmenge auch nichts zur Dimension des Atraktors beiträgt. Das bedeutet, sie können genutzt werden, das "typische" Verhalten des dynamischen Systems zu beschreiben.

Ist es aber nicht möglich, ein solches Maß zu finden, stellt sich die Frage, ob es möglich ist ein Maß mit dieser Eigenschaft zu approximieren.

**Definition 5.8** (Dynamische Dimension). *Die dynamische Dimension von  $\Phi$  ist definiert als*

$$\dim_D(A) := \sup_{\mu} (\dim_H(\pi_*(\mu)))$$

*mit dem Supremum über alle shift-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu$  auf  $\Omega$ .*

**Lemma 5.9.**

Es folgt direkt aus (1.27), dass gilt

$$\dim_D(A) \leq \dim_H(A).$$

Die Dimension eines Maßes und die dynamische Dimension werden in Abschnitt 6.5 erneut eine Rolle spielen.

# Kapitel 6

## Klassifizierung von Fraktalen

### 6.1 Selbstaffine Mengen

Selbstaffine Mengen sind eine recht allgemeine Klasse von Fraktalen, die auch alle im Weiteren genannten umfassen. Sie werden erzeugt durch iterierte Funktionensysteme, welche aus selbstaffinen Abbildungen bestehen, also Abbildungen der Form

$$\phi_i : x \mapsto Mx + v$$

wobei  $M$  eine  $n \times n$  Matrix und  $v \in D$  ein Vektor. Damit  $\phi_i$  die Kontraktionseigenschaft erfüllt muss  $|M| < 1$  gelten, wobei  $|\cdot|$  die euklidische Matrixnorm bezeichnet. Selbstaffine Transformationen sind also eine Kombination aus Translation, Rotation und Streckung in verschiedene Richtungen. Ein besonders schönes Beispiel für eine selbstaffine Menge ist der sogenannte *Barnsley-Farn*. Er wird erzeugt durch das IFS  $\Phi$  bestehend aus

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} x \\ \phi_2(x) &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\ \phi_3(x) &= \begin{pmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} \\ \phi_4(x) &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die folgende Abbildung zeigt die Iterationen der Startmenge  $[0, 1]^2$  unter  $\Phi$ . Die Bildmenge der Funktion  $\phi_1$  bildet den dünnen Stiel des Farns, die Funktion  $\phi_2$  bildet auf das große Rechteck oben ab, dass das Hauptblatt darstellt und die Funktionen  $\phi_3$  und  $\phi_4$  erzeugen die beiden seitlichen Arme des Farns.

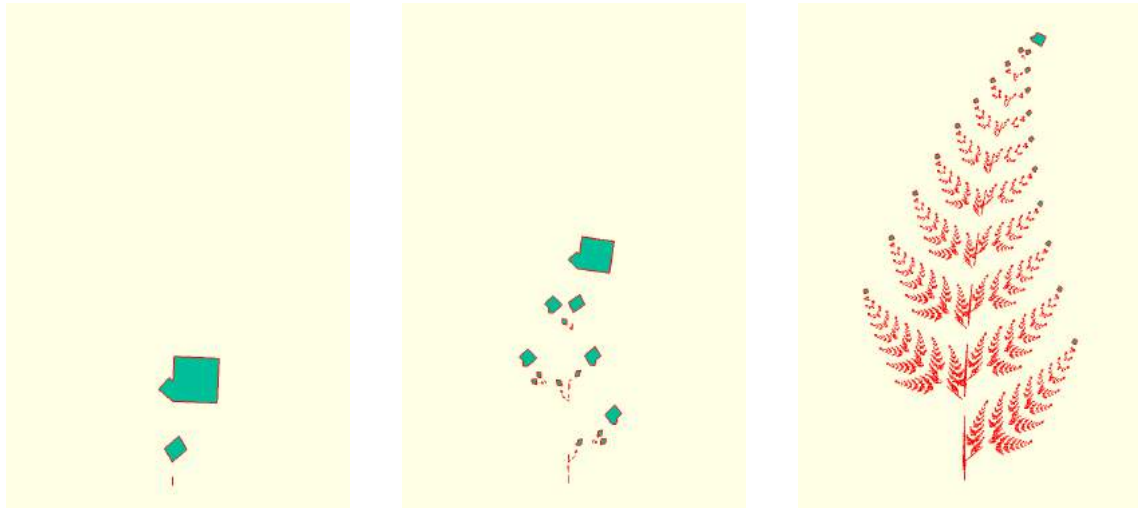


Abbildung 6.1: Darstellung der Mengen  $\Phi([0, 1]^2)$ ,  $\Phi^3([0, 1]^2)$  und  $\Phi^{10}([0, 1]^2)$  mit OpenSCAD.

Dieses Beispiel zeigt, dass sich mit recht einfachen selbstaffinen Transformationen Atraktoren mit komplexen, sehr organisch wirkenden Formen beschreiben lassen. Variationen der Parameter erlauben es, auch andere Farne, Bäume und ähnliches zu erzeugen.

An diesem Beispiel werden auch Vor- und Nachteile der beiden Methoden zur Darstellung von fraktalen Atraktoren deutlich. Während bei vorherigen Beispielen die Darstellung der iterierten Bildmenge  $\Phi^n(D)$  schon für recht kleine  $n$  ein guten Eindruck des Atraktors vermittelt haben, zeigt sich in Abbildung 1.4 eine Schwierigkeit. Sowohl die Menge  $\Phi(D)$  als auch  $\Phi^3(D)$  zeigt wenig Ähnlichkeit mit dem tatsächlichen Atraktor, der erst bei  $n = 10$  besser erkennbar wird. Aber auch hier sind in Form der grünen Rechtecke Artefakte der endlichen Approximation zu erkennen. Eine noch höhere Anzahl von Iterationen führt zu einem sehr hohen Rechenaufwand, der aufgrund der verwendeten Rekursion exponentiell mit  $n$  wächst.

Abbildung 6.2 zeigt den Barnsley-Farn erzeugt durch das chaos game mit 40000 Iterationen. Da der Rechenaufwand hier nur linear mit  $n$  wächst ist eine viel höhere Anzahl an Iterationen und damit ein besserer Detailgrad in der Darstellung möglich. Der Unterschied zeigt sich hier besonders an den Spitzen der Blätter.

Die Hausdorffdimension eines durch ein, nicht notwendigerweise selbstaffines, IFS erzeugten Atraktors lässt sich durch eine einfache Formel nach oben abschätzen. Die so erhaltene obere Schranke der Dimension nennt man auch *Ähnlichkeitsdimension*.

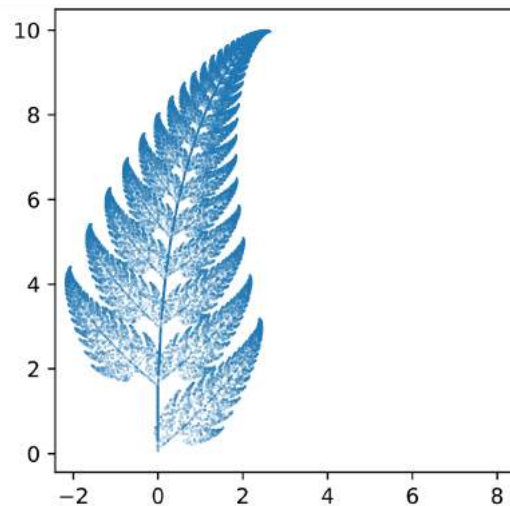


Abbildung 6.2

**Satz 6.1** (Ähnlichkeitsdimension). *Sei  $\Phi$  eine Familie von  $m$  Kontraktionen mit Kontraktionsfaktoren  $r_i$ , also mit*

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq r_i |x - y|.$$

*Dann gilt für die Hausdorffdimension des Atraktors  $\dim_H(A) \leq s$ , wobei  $s$  gegeben ist durch*

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1.$$

*Beweis.* Um die obere Schranke  $\dim_H(A) \leq s$  zu finden konstruieren wir eine  $\delta$ -Überdeckung des Atraktors  $A$ , sodass  $\mathcal{H}_\delta^s$  und damit  $\mathcal{H}^s$  endlich sind.

Sei  $\Omega_k$  die Menge aller  $k$ -Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_k)$  in  $\{1, \dots, m\}$ . Für eine Menge  $A$  schreiben wir

$$A_{\omega_1, \dots, \omega_k} := \phi_{\omega_1} \circ \dots \circ \phi_{\omega_k} \circ A.$$

Wir erinnern uns, dass für den Atraktor  $A$  gilt

$$A = \Phi(A) = \bigcup_{i=1}^m \phi_i(A).$$

Durch wiederholte Anwendung folgt daraus, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$A = \Phi(A) = \bigcup_{\Omega_k} A_{\omega_1, \dots, \omega_k}.$$

Die Mengen  $A_{\omega_1, \dots, \omega_k}$  bilden also eine Überdeckung von  $A$ . Aufgrund der Kontraktionseigenschaft und der Kompaktheit von  $A$  kann man für jedes  $\delta > 0$  ein  $k \in \mathbb{N}$  wählen, sodass

$$|A_{\omega_1, \dots, \omega_k}| \leq (\max_i r_i)^k |A| \leq \delta.$$

Damit ist  $\{A_{\omega_1, \dots, \omega_k}\}$  eine  $\delta$ -Überdeckung von  $A$ . Es gilt

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \sum_{\Omega_k} |A_{\omega_1, \dots, \omega_k}|^s \tag{6.1}$$

$$\leq \sum_{\Omega_k} (r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k})^s |A|^s \tag{6.2}$$

$$= \left( \sum_{i=1}^m r_i^s \right) \dots \left( \sum_{i=1}^m r_i^s \right) |A|^s \tag{6.3}$$

$$= |A|^s \tag{6.4}$$

wobei Zeile (6.3) durch ausmultiplizieren folgt, da in Zeile (6.1) und (6.2) jeweils über alle Elemente von  $\Omega_k$  summiert wird. In Zeile (6.4) geht die Bedingung  $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$  ein. Daraus folgt  $\mathcal{H}^s(A) \leq |A|^s$  und endlich  $\dim_H(A) \leq s$ .  $\square$

Im Fall des Barnsley-Farns besitzen die Matrizen die Matrixnormen  $|M_1| \approx 0.16$ ,  $|M_2| \approx 0.85$ ,  $|M_3| \approx 0.34$  und  $|M_4| \approx 0.38$ , die den jeweiligen Kontraktionsfaktoren  $r_i$  entsprechen. Satz 1.29 liefert nun für die Dimension des Barnsley-Farns die Abschätzung

$$\dim_H(A) \leq s \approx 1.69.$$

## 6.2 Baranski-Mengen

Um die Berechnung der Hausdorff-Dimension von Fraktalen zu erleichtern, fordert man häufig die Erfüllung der *Baranski-* oder *Offene-Mengen-Bedingung*.

**Definition 6.2** (Offene-Mengen-Bedingung). *Ein iteriertes Funktionensystem  $\Phi$  erfüllt die Offene-Mengen-Bedingung, wenn eine nicht leere offene Menge  $V \subset D$  existiert, für die gilt*

- $\Phi(V) \subset V$
- Die Mengen  $\phi_i(V)$  sind paarweise disjunkt.

Anschaulich gesprochen begrenzt die Offene-Mengen-Bedingung den Grad der Überlappung zwischen den Bildern  $\phi_i(D)$  der einzelnen Funktionen. So ist im extremen Fall von zwei gleichen Funktionen  $\phi_i = \phi_j$  die Offene-Mengen-Bedingung offensichtlich nicht erfüllt. Andererseits ist die Offene-Mengen-Bedingung immer erfüllt, sind die gesamten Bilder der Funktionen  $\phi_i(D)$  paarweise disjunkt. In diesem Fall erfüllt die das Innere der Menge  $D$ , also  $D^\circ$  die Bedingungen von Definition 6.2. Ist jedoch beides nicht der Fall, muss man zum Nachweis der Offenen-Mengen-Bedingung versuchen eine Menge  $V$  entsprechend 6.2 zu finden, was im Allgemeinen schwierig sein kann.

## 6.3 Sierpinski-Schwämme

*Sierpinski-Schwämme* beziehungsweise im zweidimensionalen Fall *Sierpinski-Teppiche* sind die Attraktoren eines iterierten Funktionensystems  $\Phi$  bestehend aus Funktionen der Form

$$\phi_i(x) = \begin{pmatrix} m_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^{-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{a_{i,1}}{m_1} \\ \vdots \\ \frac{a_{i,n}}{m_n} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Dabei sind die  $a_i, j \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq a_i, j \leq m_j$ . Angewendet auf eine Startmenge  $[0, 1]^n$  bedeutet dies, dass man zunächst diese Menge in  $m_1 \times \dots \times m_n$  Rechtecke bzw. Quader zerteilt. Jede Funktion  $\phi_i$  bildet dabei affin auf genau einen dieser Quader ab. Ein Fraktal entsteht dadurch, dass immer nur auf eine durch  $\Phi$  bestimmte Auswahl von Quadern abgebildet wird.

Daraus folgt, dass die Bilder  $\phi_i(D)$  disjunkt sind, woraus folgt, dass Sierpinski-Schwämme immer die Offene-Mengen-Bedingung erfüllen.

Ein zweidimensionales Beispiel ist das sogenannte 'Tempelfenster' in Abbildung 6.3. Die Startmenge  $D = [0, 1]^2$  wird  $4 \times 5$  kleinere Rechtecke unterteilt.  $\Phi$  bildet auf alle bis auf 7 innere Rechtecke ab.



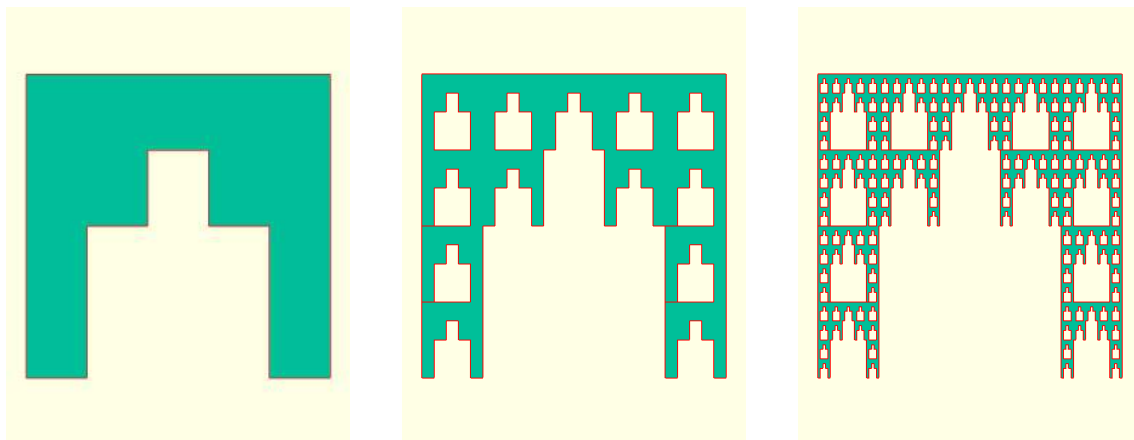


Abbildung 6.3: Sierpinski-Teppich als 'Tempelfenster'. Darstellung der Mengen  $\Phi([0, 1]^2)$ ,  $\Phi^3([0, 1]^2)$  und  $\Phi^{10}([0, 1]^3)$  mit OpenSCAD.

Erzeugt wird dieses Fraktal durch ein IFS bestehend aus 13 Funktionen der Form

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{a_{i,1}}{5} \\ \frac{a_{i,1}}{4} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

mit 13 Paaren  $(a_{i,1}, a_{i,2})$ , die das in Abbildung 1.6 erkennbare Muster beschreiben. Die Funktionen  $\phi_i$  erfüllen also offensichtlich

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|.$$

Damit lässt sich die Dimension anhand von Satz 1.29 nach oben abschätzen durch

$$\dim_H(A) \leq \frac{\log 13}{\log 4} \approx 1.85 \quad (6.7)$$

Es existiert jedoch auch eine exakte Formel für die Hausdorffdimension eines zweidimensionalen Sierpinski-Teppichs, die von McMullen in [McM84] gezeigt wurde.

**Satz 6.3** (Hausdorffdimension von Sierpinski-Teppichen). *Sei  $A \subset [0, 1]^2$  ein Sierpinski-Teppich erzeugt durch die Unterteilung von  $[0, 1]^2$  in  $p \times q$  Rechtecke. Sei  $N_j$  für  $j \in \{1, \dots, p\}$  die Anzahl der Rechtecke in der  $j$ 'ten Spalte, auf die eine Funktion des IFS abbildet. Dann gilt für die Hausdorff-Dimension des Atraktors*

$$\dim_H(A) = \log \left( \sum_{j=1}^p N_j^{\log p / \log q} \right) \frac{1}{\log p}. \quad (6.8)$$

Im Beispiel des 'Tempelfensters' (1.24) ist  $p = 5$ ,  $q = 4$  sowie  $N_1 = N_5 = 4$ ,  $N_2 = N_3 = 2$  und  $N_4 = 1$ . Damit folgt aus (1.25)

$$\dim_H(A) \approx 1.70$$

Im Vergleich dieses exakten Wertes mit (6.7) zeigt sich die Ähnlichkeitsdimension also als eine recht gute obere Abschätzung der Hausdorffdimension. Dies liegt in diesem Fall daran, dass sich die

Kontraktionsfaktoren in den beiden Richtungen, also  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{5}$ , nur wenig unterscheiden. Wären sie gleich, würde man die Funktionen  $\phi_i$  als *selbstähnlich* bezeichnen. Im folgenden Abschnitt wird sich zeigen, dass in diesem Fall die Ähnlichkeitsdimension gleich der Hausdorffdimension ist.

Zu bemerken ist hier, dass in (6.8) die Dimension nicht nur von den Kontraktionsfaktoren und der Anzahl der Funktionen des iterierten Funktionensystems abhängt, sondern auch, über die  $N_j$ , von der Anordnung der Bildmengen in dem  $p \times q$  Raster. Eine einfache Verschiebung von Volumenausschnitten kann also zu einer unterschiedlichen Hausdorffdimension führen. Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen zwei Beispiele von Sierpinski-Teppichen, deren IFS der Form von (6.6) entsprechen. Nur die  $a_{i,j}$  sind hier anders gewählt, die Bildmengen der 13 affinen Kontraktionen also nur anders angeordnet.

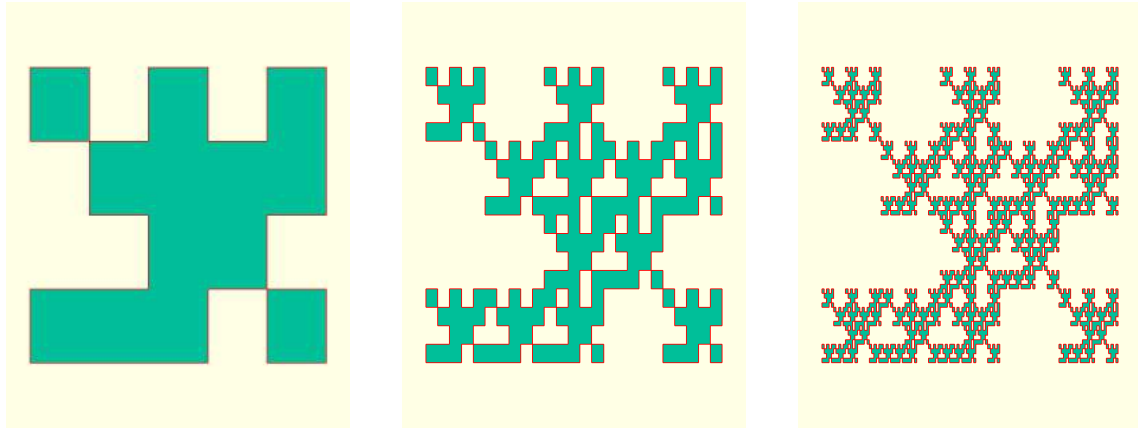


Abbildung 6.4: Sierpinski-Teppich mit relativ gleichmäßiger Verteilung der Bildmengen auf  $[0, 1]^2$ .

In Abbildung 6.4 sind die Bildmengen möglichst gleichmäßig über den Raum  $[0, 1]^2$  verteilt. Man erhält  $N_1 = N_2 = N_4 = 2$ ,  $N_3 = 4$  und  $N_5 = 3$ . Damit liefert (6.8) eine etwas kleinere Dimension von

$$\dim_H(A) \approx 1.63.$$

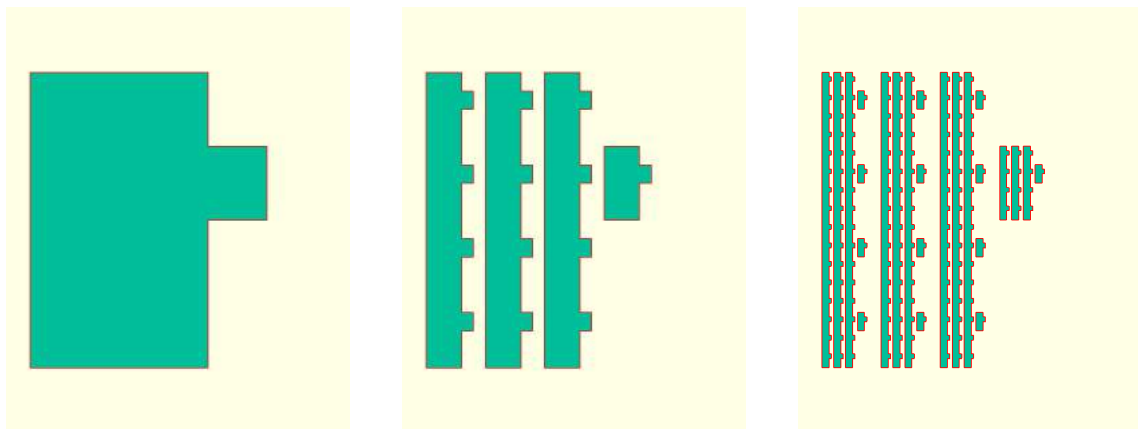


Abbildung 6.5: Sierpinski-Teppich mit kompakter Verteilung der Bildmengen.

Eine kompaktere Anordnung der Bildmengen wie in Abbildung 6.5 jedoch führt zu einer etwas größeren Hausdorffdimension. Hier erhält man mit

$$\dim_H(A) \approx 1.72$$

einen Wert, der über dem der beiden weniger kompakten Beispielen liegt.

## 6.4 Selbstähnliche Mengen

*Selbstähnliche Fraktale* sind eine recht enge Klasse von Mengen, die durch ein iteriertes Funktionensystem bestehend aus Transformationen der Form

$$\phi_i(x) = Mx + v \tag{6.9}$$

erzeugt werden, wobei wieder  $v \in D$  ist, aber  $|M| = r_i$  gelten muss für ein  $r_i \in (0, 1)$ . Das bedeutet, dass zwar Translation, Rotation und Skalierung möglich ist, aber keine Streckung um verschiedene Faktoren in verschiedene Richtungen. Selbstähnliche Transformationen bilden also Kreise auf Kreise, Quadrate auf Quadrate u.s.w. ab.

Die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit in Verbindung mit der Offenen-Mengen-Bedingung ermöglicht es, eine vergleichsweise einfache und elegante Formel für die Hausdorff-Dimension des Atraktors zu finden. Für den Beweis benötigt man jedoch noch das folgende technische Lemma.

**Proposition 6.4.** *Sei  $\{V_i\}$  eine Menge von paarweise disjunkten offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , sodass jedes  $V_i$  einen Ball mit Radius  $a_1$  enthält und in einem Ball mit Radius  $a_2$  enthalten ist. Dann schneidet ein Ball  $B$  mit Radius  $r$  höchstens  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$  der Mengen  $\bar{V}_i$ .*

*Beweis.* Schneidet ein  $\bar{V}_i$  den Ball  $B$ , dann ist  $\bar{V}_i$  enthalten in einem mit  $B$  konzentrischen Ball mit Radius  $(1 + 2a_2)r$ . Angenommen,  $q$  Mengen  $V_i$  schneiden  $B$ , dann sind alle diese Mengen jeweils in dem Ball mit Radius  $(1 + 2a_2)r$  enthalten und enthalten selbst einen Ball mit Radius  $a_1 r$ . Daraus folgt, dass das Volumen des äußeren Balls größer-gleich der Summe der Volumen der inneren Bälle ist, da die  $V_i$  und damit auch die in ihnen enthaltenen Bälle disjunkt sind. Es gilt also:

$$q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n.$$

□

**Satz 6.5** (Dimension selbstähnlicher Schwämme). *Sei  $\Phi$  eine Familie  $m$  kontrahierender Ähnlichkeiten mit Kontraktionsfaktoren  $r_i$ , die die offene-Mengen-Bedingung erfüllt. Dann gilt für die Hausdorffdimension des Atraktors  $\dim_H(A) = s$ , wobei  $s$  gegeben ist durch*

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = 1.$$

*Beweis.* Die obere Schranke  $\dim_H(A) \leq s$  folgt direkt aus Satz 6.1. Es bleibt zu zeigen, dass die Ähnlichkeitsdimension unter den genannten Voraussetzungen nicht nur eine obere Schranke liefert, sondern den exakten Wert der Hausdorff-Dimension.  $s$  muss also auch eine untere Schranke für  $\dim_H(A)$  darstellen. Hierfür nutzt man das Massenverteilungs-Prinzip. Dafür muss zunächst der

Atraktor mit einem Maß versehen werden. Man verwendet das Bernoullimaß auf  $\Omega$ , welches definiert ist durch Wahrscheinlichkeiten

$$p_i = r_i^s$$

für Folgenglieder  $\omega_i$ . Diese Konstruktion liefert aufgrund der Bedingung  $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$ . Um nun mit dem Massenverteilungsprinzip eine untere Schranke der Hausdorffdimension zu erhalten, muss man zeigen, dass für alle offenen Mengen  $U \subset A$  mit  $|U| < \epsilon$  für einen Faktor  $c$  gilt

$$\nu(U) \leq c|U|^s.$$

Da  $\Phi$  die offene-Mengen-Bedingung erfüllt, existiert eine offene, nicht-leere und beschränkte Menge  $V \subset A$ , für die gilt

$$\Phi(V) \subset V.$$

Damit gilt auch

$$\Phi(\bar{V}) \subset \bar{V}$$

und wie anfänglich bereits gezeigt wurde konvergiert die Folge der Iterierten  $\Phi^k(\bar{V})$  gegen  $A$ . Sei  $B \subset A$  ein Ball mit Radius  $r < 1$ . Wir wollen das Maß von  $B$  abschätzen durch das Maß der Mengen  $V_{\omega_1, \dots, \omega_k}$ , welche  $B$  schneiden.

Für jede Folge  $\omega \in \Omega$  bezeichnen wir hier mit  $k$  die kleinste natürliche Zahl, für die gilt

$$r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k} \leq r$$

und schneiden die Folge  $\omega$  nach an dieser Stelle ab, um ein  $k$ -Tupel zu erhalten. Die Menge aller solcher Tupel wird mit  $\mathcal{Q}$  bezeichnet.

Da  $V_1, \dots, V_m$  nach der offenen-Mengen-Bedingung disjunkt sind, sind dies folglich auch jeweils die Mengen  $V_{\omega_1, \dots, \omega_k, 1}, \dots, V_{\omega_1, \dots, \omega_k, m}$ . Nun wählen wir für eine solche offene Menge  $V$  ein  $a_1, a_2 > 0$ , sodass  $V$  in einen Ball mit Radius  $a_1$  enthält und selbst in einem Ball mit Radius  $a_2$  enthalten ist. Für alle Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \mathcal{Q}$  ist folglich in der Menge  $V_{\omega_1, \dots, \omega_k}$  ein Ball mit Radius  $r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k} a_1$  enthalten und ein Ball mit Radius  $r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k} a_2$  enthält  $V_{\omega_1, \dots, \omega_k}$ .

Mit  $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}$  bezeichnen wir diejenigen Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ , für die  $\bar{V}_{\omega_1, \dots, \omega_k}$  den bereits erwähnten Ball  $B$  schneidet.

Aus der Proposition 6.4 folgt, dass die Menge  $\mathcal{Q}_1$  endlich ist und höchstens  $q := (1+2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i r_i)^{-n}$  Elemente enthält. Dann gilt für das Maß des Balls  $B$

$$\nu(B) = \nu(B \cap A) \tag{6.10}$$

$$= \mu(\pi^{-1}(B \cap A)) \tag{6.11}$$

$$\leq \mu\left(\bigcup_{\mathcal{Q}_1} [\omega_1, \dots, \omega_k]_1^k\right) \tag{6.12}$$

$$\leq \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu([\omega_1, \dots, \omega_k]_1^k) \tag{6.13}$$

$$= \sum_{\mathcal{Q}_1} (r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k})^s \tag{6.14}$$

$$\leq \sum_{\mathcal{Q}_1} r^s \tag{6.15}$$

$$\leq r^s q, \tag{6.16}$$

wobei in Zeile (6.12) die Vereinigung über alle Zylinder erfolgt, welche in  $\Omega$ , der Menge der Folgen in  $\{1, \dots, m\}$ , enthalten sind, die jeweils auf ihren festgelegten Elementen mit denen eines Tupels aus  $\mathcal{Q}_1$  übereinstimmen. In Zeile (6.14) nutzt man die Definition des Maßes  $\mu$  und in Zeile (6.15), dass  $k$  gerade so gewählt ist, dass  $(r_{\omega_1} \dots r_{\omega_k}) \leq r$  ist. In (6.16) wird schließlich verwendet, dass nach der Proposition die Menge  $\mathcal{Q}_1$  endlich ist und höchstens  $q$  Elemente besitzt.

Da jede Menge  $U$  in einem Ball mit Radius  $r = |U|$  enthalten ist, gilt auch  $\nu(U) \leq |U|^s q$  und aus dem Massenverteilungs-Prinzip 5.6 folgt endlich, dass  $\dim_H(A) \geq s$ .

Damit folgt die Gleichheit.

[Fal14, Theorem 9.3] □

Der Satz 6.5 ermöglicht es, die Hausdorffdimension von durch entsprechende IFS erzeugte Fraktale sehr leicht zu berechnen. Für manche Gruppen von Fraktalen lässt sich der Satz aber noch vereinfachen.

Die offene-Mengen-Bedingung ist erfüllt, wenn die Bilder der einzelnen Funktionen  $\phi_1(D), \dots, \phi_m(D)$  disjunkt sind.

Sind weiterhin die Kontraktionsfaktoren  $r_i$  aller Funktionen gleich  $r_1 = \dots = r_m = r$ , dann vereinfacht sich die Bedingung

$$\sum_{i=1}^m r_i^s = m r^s = 1$$

für die Dimension  $\dim_H(A) = s$  zu

$$\dim_H(A) = -\frac{\log m}{\log r}. \tag{6.17}$$

Die Formel ist auch intuitiv sinnvoll, mehr 'Kopien' des Körpers sowie ein kleinerer Kontraktionsfaktor führen zu mehr Volumen und damit zu einer größeren Hausdorffdimension. Damit lässt sich die Dimension von Attraktoren, die diese Bedingungen erfüllen quasi auf einen Blick feststellen.

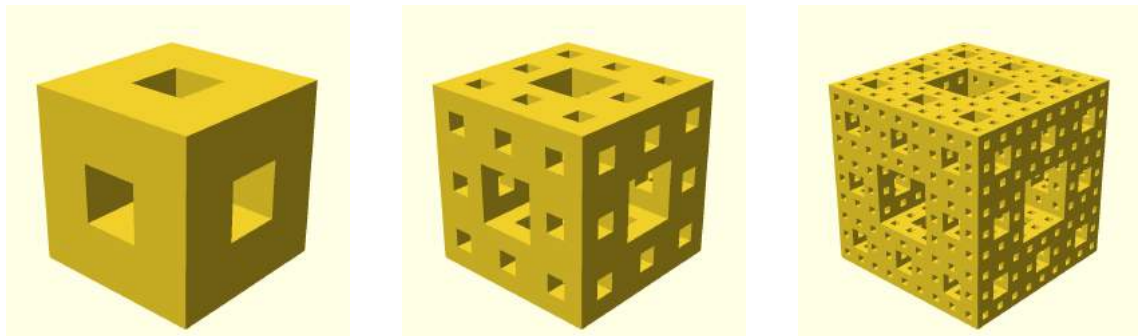


Abbildung 6.6: Der bekannte Menger-Schwamm in drei Iterationen

Der Menger-Schwamm wird erzeugt durch 20 selbstähnliche Transformationen, die jeweils einen Kontraktionsfaktor von  $\frac{1}{3}$  besitzen. Die skalierten Bilder der Startmenge  $[0, 1]^3$  sind disjunkt entlang der Kanten des Würfels angeordnet. Durch Iteration entsteht eine schwammartige Struktur. Formel (6.17) liefert für die Hausdorffdimension

$$\dim_H(A) = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.73$$

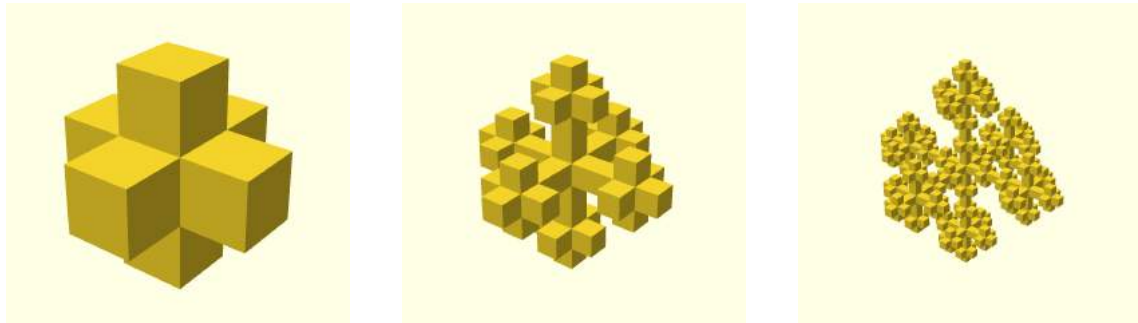


Abbildung 6.7: Zum Menger-Schwamm komplementäre Anordnung der Bilder. Die Atraktoren sind jedoch nicht komplementär.

Abbildung 6.7 zeigt eine 'Schneeflocke' erzeugt durch ein IFS aus 7 selbstähnlichen Transformationen mit Kontraktionsfaktor von ebenfalls  $\frac{1}{3}$ , deren Bilder gerade den Raum füllen, der im Fall den Menger-Schwamms 6.6 frei gelassen wird. Die ersten Iterationen von Abb. 6.7 und 6.6 sind daher Komplemente, nicht jedoch die eigentlichen Atraktoren. Formel (6.17) liefert

$$\dim_H(A) = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.77$$

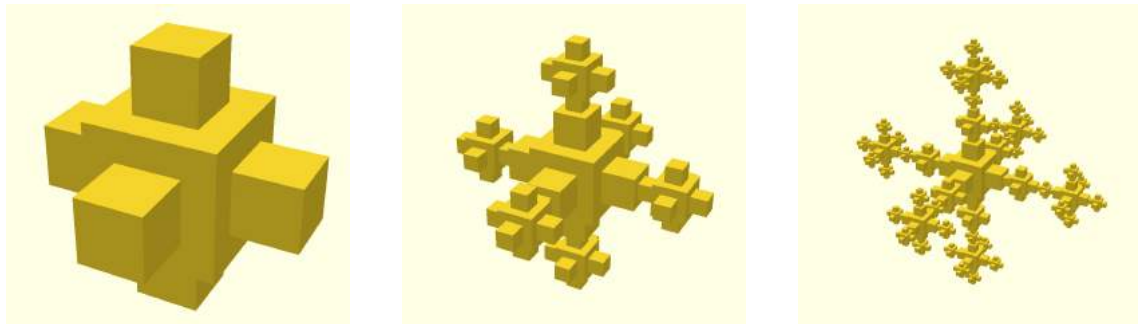


Abbildung 6.8: Variante von Abb. 6.7 mit unterschiedlichen Skalierungsfaktoren.

Satz 6.5 ermöglicht es, auch die Dimension von Atraktoren zu berechnen, deren iterierte Funktionensysteme nicht nur Transformationen mit gleichen Kontraktionsfaktoren enthalten. Abbildung 6.8 zeigt die Iteration einer Modifikation des IFS von Abbildung 6.7. Hier werden nicht mehr alle sieben Bilder um  $\frac{1}{3}$  skaliert, sondern das mittlere um  $\frac{1}{2}$  und die sechs äußeren um  $\frac{1}{4}$ . Satz 6.5 liefert durch Lösung der Gleichung  $6 \cdot \frac{1}{4}^s + \frac{1}{2}^s = 1$

$$\dim_H(A) = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.59$$

## 6.5 Baranski-Schwämme

Eine sehr spezielle Klasse von Fraktalen wird in der Arbeit [DS17] von Das und Simmons verwendet, um ein Fall zu konstruieren, in dem die dynamische Dimension echt kleiner der Hausdorffdimension

ist. Diese werden als *Baranski-Schwämme* bezeichnet. Es sind Baranski-Mengen auf der Startmenge  $D = [0, 1]^3$ , deren iterierte Funktionensysteme aus dem Produkt von drei Kontraktionen auf dem Intervall  $[0, 1]$  bestehen. Ein Beispiel für eine solche Menge ist wiederum der Menger-Schwamm aus Abbildung 6.6.

Mit Theorem 2.15 liefert [DS17] eine Methode zur Berechnung der Dimension eines Maßes auf einem Baranski-Schwamm. Dafür sind einige technische Definitionen nötig. Sei  $p$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\{1, \dots, m\}$ , das ein Bernoullimaß  $\nu_p$  definiert sowie  $j$  eine Raumrichtung. Dann ist der *Lyapunov Exponent* definiert als

$$\chi_j(p) = - \int \log(|\partial_j \phi_i|) dp(i). \quad (6.18)$$

Die *Entropie* von  $p$  in Bezug auf eine Auswahl von Raumrichtungen  $I$  ist definiert als

$$h(I; p) = - \int \log(p[i]_I) dp(i), \quad (6.19)$$

wobei mit  $[i]_I$  alle Elemente des Alphabets  $\{1, \dots, m\}$  gemeint sind, deren Funktionen  $\phi_i$  auf den mit der Menge  $I$  bezeichneten Raumrichtungen übereinstimmen.

Theorem 2.15 in [DS17] liefert nun für die Dimension eines Bernoullimaßes  $\nu_p$

$$\dim_H(\nu_p) = \int_0^\infty h(\{i \in D : b \leq \chi_i(p)^{-1}\}; p) db. \quad (6.20)$$

Wie erwähnt wird der Menger-Schwamm durch 20 Funktionen erzeugt. Sei  $p$  nun ein Maß, das jedem Element des Alphabets  $\{1, \dots, 20\}$  eine Wahrscheinlichkeit zuordnet und ein Bernoullimaß definiert.

Die Lyapunov Exponenten berechnen sich zu

$$\chi_i(p) = - \int \log(|\partial_j \phi_i|) dp(i) = \sum_{i=1}^{20} \log(3) p_i = \log 3$$

und damit gilt für die Dimension des Bernoullimaßes  $\nu_p$

$$\begin{aligned} \dim_H(\nu_p) &= \int_0^\infty h(\{i \in D : b \leq \chi_i(p)^{-1}\}; p) db \\ &= \frac{1}{\log 3} h(D; p) \\ &= \frac{1}{\log 3} \int -\log p_i dp(i) \\ &= \frac{1}{\log 3} \sum_{i=1}^{20} \log\left(\frac{1}{p_i}\right) p_i. \end{aligned}$$

Sind alle Wahrscheinlichkeiten gleich, gilt also  $p_i = \frac{1}{20}$  für alle Richtungen  $i$ , dann ergibt sich die Dimension des Maßes mit  $\dim_H(\nu_p) = \frac{\log 20}{\log 3}$  gleich der nach Satz 6.5 berechneten Dimension des

Atraktors. Dieses Bernoullimaß besitzt also volle Dimension. Für andere Wahlen der Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  kann die Dimension jedoch auch echt kleiner sein. Die dynamische Dimension ist damit durch das Supremum in diesem Beispiel aber gleich der Hausdorffdimension.

Die Dynamische Dimension auf einem Baranski-Schwamm lässt sich nach [DS17] durch das Supremum über die Dimensionen aller Bernoullimaße berechnen.

Durch eine leichte Verallgemeinerung lässt sich dieses Verfahren auch nutzen, um auch die Dimension von Pseudo-Bernoullimaßen zu bestimmen. Das Supremum in diesem Fall kann zur Bestimmung der Hausdorffdimension eines Baranski-Schwamms verwendet werden.

Der Unterschied zwischen dynamischer und Hausdorffdimension, der so nachgewiesen werden kann tritt nur in dreidimensionalen Baranski-Schwämmen sehr spezieller Konstruktion auf. Die Autoren verwenden ein Funktionensystem, das sich wiederum aus drei Funktionensystemen mit unterschiedlichen Kontraktionsfaktoren zusammensetzt. Insgesamt wird die Zahl der benötigten Funktionen unter Umständen sehr groß. Einen konkreten Baranski-Schwamm, der diese Bedingungen erfüllt zu konstruieren ist mir daher nicht gelungen. Die Autoren zeigen jedoch, dass die Klasse der solcher Schwämme einer offenen Menge auf dem Parameterraum entspricht, was bedeutet, dass dieses Verhalten nicht nur auf eine vernachlässigbar geringe Zahl von Fällen beschränkt ist. Die Suche nach einem solchen Beispiel könnte eine hierauf aufbauende Arbeit darstellen.



# Literaturverzeichnis

- [BD85] M. F. Barnsley and S. Demko. Iterated function systems and the global construction of fractals. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 399(1817):243–275, 1985.
- [DS17] Tushar Das and David Simmons. The Hausdorff and dynamical dimensions of self-affine sponges: a dimension gap result. *Invent. Math.*, 210(1):85–134, 2017.
- [Fal14] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, third edition, 2014. Mathematical foundations and applications.
- [McM84] Curt McMullen. The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets. *Nagoya Math. J.*, 96:1–9, 1984.
- [PY98] Mark Pollicott and Michiko Yuri. *Dynamical systems and ergodic theory*, volume 40 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.