

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK  
RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

BACHELORARBEIT

# Über das Löwner-John-Ellipsoid und die Steiner-Inellipse zum Satz von Marden

Eric Kristoffer Ommert

Betreuerin:  
Prof. Dr. Maria Beatrice Pozzetti

10. Februar 2022

## **ABSTRACT**

This bachelor thesis is about Löwner-John ellipsoids and the special Steiner inellipse, as well as the geometric connection between the roots of a complex cubic polynomial and its derivative. The central result is given by Marden's theorem, which shows an exact position of these roots: The roots of the derivative of the polynomial correspond to the foci of the Steiner inellipse of the triangle spanned by the roots of the polynomial. To prove this theorem, a short introduction to convex geometry is adduced and based on that Löwner-John ellipsoids are considered. In order to proof finally the theorem of Marden, the Steiner inellipse and its associated properties are discussed, to take it as a geometric configuration for that proof.

## **ZUSAMMENFASSUNG**

In dieser Bachelorarbeit geht es grundlegend um Löwner-John-Ellipsoide und die besondere Steiner-Inellipse sowie den geometrischen Zusammenhang zwischen den Nullstellen eines komplexen Polynoms dritten Grades und dessen Ableitung. Das zentrale Ergebnis liefert der Satz von Marden, der eine genaue Position dieser Nullstellen aufzeigt: Die Nullstellen der Ableitung des Polynoms entsprechen den Brennpunkten der Steiner-Inellipse des durch die Nullstellen des Polynoms aufgespannten Dreiecks. Um jenen Satz zu beweisen, gibt diese Arbeit eine kurze Einführung in die konvexe Geometrie, auf deren Basis Löwner-John-Ellipsoide betrachtet werden, zu denen insbesondere auch die Steiner-Inellipse gehört. Die Charakterisierung der Steiner-Inellipse durch ihre zugehörigen Eigenschaften ermöglicht letztendlich eine Auffassung ihrerseits als geometrische Anordnung für den Beweis des Satzes von Marden.

# Inhaltsverzeichnis

1	Prolog	1
2	Einführung in die konvexe Geometrie	3
3	Löwner-John-Ellipsoide	9
4	Steiner-Inellipse	12
5	Satz von Marden	25
6	Epilog	28
7	Literaturverzeichnis	30
8	Eigenständigkeitserklärung	31

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Satz von Marden . . . . .	2
2.1	konvexe Menge $M$ und nichtkonvexe Menge $N$ . . . . .	3
2.2	konvexer Körper $M$ und nichtkonvexer Körper $N$ . . . . .	4
2.3	Transformation von $K \xrightarrow{f} \tilde{K}$ . . . . .	7
3.1	Löwner-John-Ellipsoid . . . . .	10
4.1	Steiner-Inellipse . . . . .	13
4.2	Transformation von $K \xrightarrow{f} \tilde{K}$ . . . . .	14
4.3	Transformation von $\tilde{K} \xrightarrow{f^{-1}} K$ und $\tilde{S} \xrightarrow{f^{-1}} S$ . . . . .	15
4.4	große und kleine Halbachse einer Ellipse . . . . .	15
4.5	Brennpunkte einer Ellipse . . . . .	16
4.6	Dreieck $K$ mit Steiner-Inellipse $S$ . . . . .	17
4.7	Dreieck $\tilde{K}$ mit Steiner-Inellipse $\tilde{S}$ . . . . .	22
4.8	Brennpunkte der Steiner-Inellipse von $K$ . . . . .	24
5.1	Nullstellen der Polynome $p$ und $p'$ . . . . .	27
6.1	Position der Nullstellen . . . . .	28

Alle Abbildungen wurden eigenständig mithilfe des frei verfügbaren dynamischen Geometrieprogramms GeoGebra (Version: 6.0.640.0-offline) erstellt.

# 1 Prolog

Der Satz von Marden stammt ursprünglich von dem Mathematiker Jörg Siebeck, der ihn bereits im Jahre 1864 entdeckt und in einer Arbeit über ihn berichtet hat. Da der Mathematiker Morris Marden diesen Satz in neun wissenschaftlichen Artikeln im Zeitraum von 1864 bis 1928 zitiert und darauf verweist, ist er heute unter seinem Namen besser bekannt. Bevor der über 150 Jahre alte Satz näher beschrieben wird, verdeutlicht das nachfolgende Beispiel zuerst den Hintergrund des Satzes. Dazu werden die Nullstellen des Polynoms  $p(x) := (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  betrachtet, welche durch  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  gegeben sind. Die Nullstellen der Ableitung  $p'(x) = 3x^2 - 12x + 11$  des Polynoms  $p$  sind hingegen  $x'_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1.42$  und  $x'_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2.58$ . Dabei fällt auf, dass die Nullstellen der Ableitung  $p'$  zwischen den Nullstellen des Polynoms  $p$  selbst liegen, da  $x_1 < x'_1 < x'_2 < x_3$  gilt. Diese Tatsache ist kein Zufall und vor diesem Hintergrund wird sich im Folgenden dem Satz von Marden gewidmet. (vgl. [Cha], S. 101f. und [Kal], S. 330f.)

Werde ein komplexes Polynom dritten Grades mit drei nichtkollinearen, einfachen Nullstellen betrachtet, so spannen jene drei Nullstellen in der komplexen Zahlenebene ein konvexes Dreieck auf. In der Welt der Konvexität besagt der Satz von Gauss-Lucas, dass die Nullstellen der Ableitung eines solchen komplexen Polynoms innerhalb des von den Nullstellen des Polynoms induzierten Dreiecks liegen. Somit besteht zwischen dem Polynom und dessen Ableitung nicht nur ein Zusammenhang durch die Differentialrechnung, sondern auch eine geometrische Beziehung durch die jeweiligen Nullstellen. Über den beschriebenen Satz von Gauss-Lucas hinaus liefert der Satz von Marden die exakte Position der Nullstellen der Ableitung in jenem Dreieck. Es existiert zu jedem so aufgespannten Dreieck eine einzigartige Ellipse, die sogenannte Steiner-Inellipse, die diesem Dreieck einbeschrieben ist und genau die Mittelpunkte der Dreiecksseiten berührt. Aufgrund dieser Konfiguration ist sie ein Ellipsoid mit maximalem Volumen in jenem konvexen Dreieck und somit auch ein Löwner-John-Ellipsoid. Letztendlich entsprechen die Nullstellen der Ableitung dann nach dem Satz von Marden gerade den beiden Brennpunkten dieser besonderen Steiner-Inellipse. In der nachfolgenden Abbildung 1.1 ist dieser geometrische Zusammenhang zu erkennen. (vgl. [Min], S. 679)

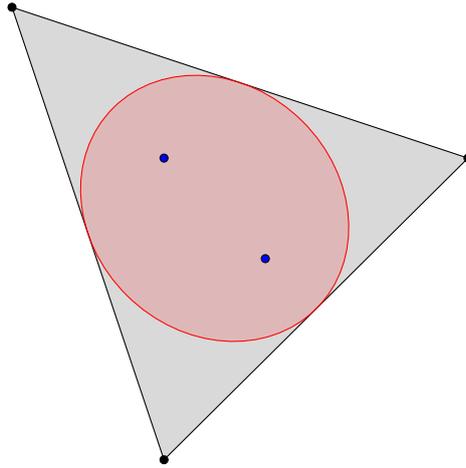


Abbildung 1.1: Satz von Marden

Dabei entsprechen die schwarzen Punkte den Nullstellen eines komplexen Polynoms vom Grad drei, die ein Dreieck aufspannen, welches grau dargestellt ist. Die zu diesem Dreieck zugehörige Steiner-Inellipse ist rot gefärbt und deren Brennpunkte, die mit den Nullstellen der Ableitung jenes Polynoms übereinstimmen, sind in blau gekennzeichnet.

Diese Ergebnisse werden in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit mithilfe einfacher konvexer, affiner Geometrie genauer beleuchtet. Dazu werden im folgenden Kapitel zuerst die Grundlagen der konvexen Geometrie dargestellt. Diese beinhalten einige Definitionen und Sätze zu konvexen Mengen und ihren Eigenschaften. Des Weiteren werden nichtsinguläre, affine Abbildungen eingeführt und der Erhalt der Konvexität unter solchen Transformationen nachgewiesen. Im dritten Kapitel werden dann Ellipsoide betrachtet und insbesondere Löwner-John-Ellipsoide in der zuvor eingeführten konvexen Welt demonstriert. Danach werden im vierten Kapitel die Steiner-Inellipse und ihre bedeutenden Eigenschaften thematisiert. Hierzu gehören neben der Existenz und der Eindeutigkeit noch einige Definitionen und Sätze zu den geometrisch charakteristischen Größen sowie der Beweis, dass die Steiner-Inellipse auch ein Löwner-John-Ellipsoid ist. Zusätzlich wird im vierten Kapitel auch der Übergang in die komplexe Zahlenebene gegeben, um weitere Eigenschaften zu zeigen, die im fünften Kapitel im Beweis des Satzes von Marden Anwendung finden. Jener Beweis kann somit durch die zuvor eingeführten Methoden und Eigenschaften abgeschlossen werden und mit einem geeigneten Beispiel veranschaulicht werden.

## 2 Einführung in die konvexe Geometrie

Zu Beginn werden in diesem Kapitel einige grundlegende Definitionen und Sätze der konvexen Geometrie aufgeführt. Dazu gehört die Betrachtung konvexer Mengen und der Erhalt derer Eigenschaften unter nichtsingulären, affinen Transformationen. Diese Einführung bildet die Grundlage des Rahmens, in dem anschließend Löwner-John-Ellipsoide präsentiert werden. Dabei sei zunächst der Raum für jene Betrachtungen der reelle,  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ , wobei dieser endlichdimensional ist, also stets  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n < \infty$  gilt.

### (2.1) Definition (*konvexe Menge*)

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge. Dann heißt  $M$  *konvex*, falls für alle  $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  und alle  $x, y \in M$  gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M. \quad (2.1)$$

### (2.2) Beispiel (*konvexe und nichtkonvexe Mengen*)

Anschaulich betrachtet ist eine Menge genau dann konvex, wenn sie auch jeweils die gesamte Verbindungsstrecke zweier in ihr enthaltener Punkte enthält. Demnach ist in diesem Beispiel in Abbildung 2.1 die Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  konvex und die Menge  $N \subset \mathbb{R}^2$  nicht konvex, weil es in  $N$  offensichtlich Punktepaaire gibt, deren Verbindungsstrecken nicht vollständig in  $N$  liegen.

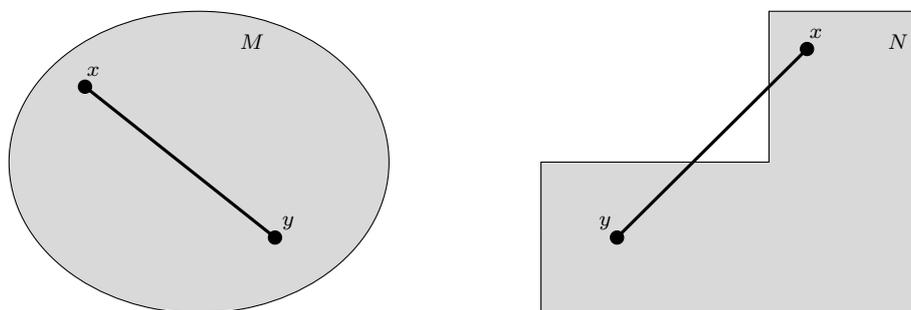


Abbildung 2.1: konvexe Menge  $M$  und nichtkonvexe Menge  $N$

Im Anschluss wird die Eigenschaft der Konvexität auf geometrische Körper übertragen.

**(2.3) Definition** (*konvexer Körper*)

Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge. Dann heißt  $K$  *konvexer Körper*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $K$  ist konvex,
- (ii)  $K$  ist kompakt und
- (iii)  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ ,

wobei  $\text{int}(\cdot)$  dem Inneren einer Menge entspricht.

**(2.4) Beispiel** (*konvexe Körper und nichtkonvexe Körper*)

Seien  $M, N \subset \mathbb{R}^3$  Mengen, die wie folgt definiert sind:

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} \leq 1 \right\}, \quad (2.2)$$

$$N := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{4^2} = 0 \right\}. \quad (2.3)$$

Dann ist die Menge  $M$ , die nachfolgend grafisch durch die linken Figur dargestellt ist, ein Beispiel für einen konvexen Körper und die Menge  $N$ , die durch die rechte Figur angedeutet ist, ein Beispiel für einen nichtkonvexen Körper, weil (i)  $N$  nicht konvex ist und (ii)  $N$  nicht kompakt ist. Dadurch ist die Definition (2.3) für konvexe Körper für  $N$  nicht erfüllt.

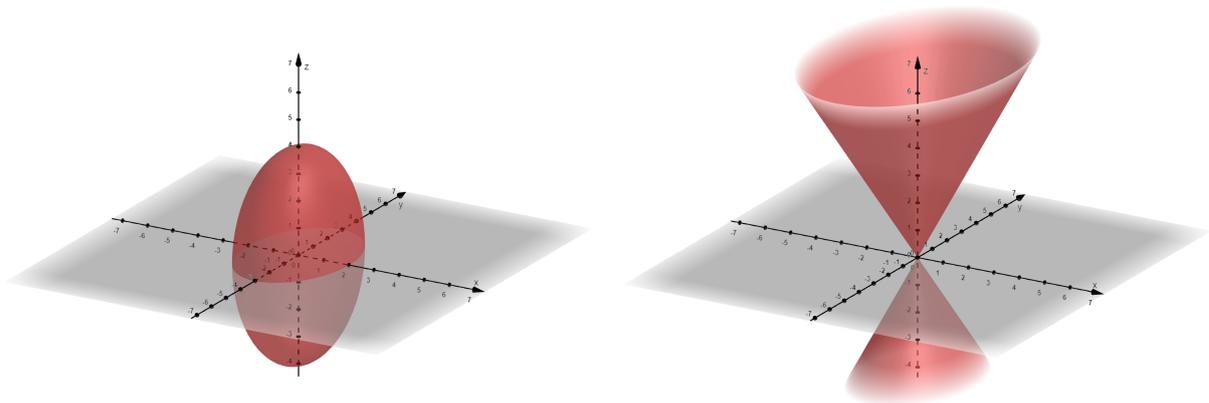


Abbildung 2.2: konvexer Körper  $M$  und nichtkonvexer Körper  $N$

Im Weiteren wird gezeigt, wie sich konvexe Mengen und Körper unter nichtsingulären, affinen Transformationen verhalten. Die resultierenden Ergebnisse sind später in den Beweisen für die Allgemeingültigkeit der Aussagen von großer Bedeutung.

**(2.5) Definition** (*affine Abbildung*)

Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix und  $b \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor. Dann heißt eine Abbildung  $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Form

$$f_{A,b}(x) = Ax + b \quad (2.4)$$

*affine Abbildung.*

**(2.6) Definition** (*nichtsinguläre, affine Abbildung*)

Sei  $f_{A,b}$  eine affine Abbildung wie in (2.5) definiert. Dann heißt  $f_{A,b}$  insbesondere *nichtsinguläre, affine Abbildung*, falls  $\det(A) \neq 0$  gilt, wobei  $\det(\cdot)$  der Determinante einer Matrix entspricht.

**(2.7) Bemerkung** (*nichtsinguläre, affine Abbildung*)

Es ist nun ersichtlich, dass die Matrix  $A$  einer nichtsingulären, affinen Abbildung  $f_{A,b}$  eine nullpunkterhaltende Veränderung des Raumes bewirkt und der Vektor  $b$  eine anschließende Translation erzeugt.

*Beweis:* Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix und  $b \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor. Zeige zuerst, dass die nichtsinguläre Abbildung  $f_{A,0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$f_{A,0}(x) := Ax, \quad (2.5)$$

den Nullpunkt erhält.

Sei dazu  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  der Nullpunkt des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ . Dann folgt für alle  $A$  offensichtlich, dass

$$f_{A,0}(\mathbf{0}) = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

gilt. Die Rechengesetze lassen das additive Hinzufügen eines Vektors  $b \in \mathbb{R}^n$  zu, ohne dass die Wirkung der Matrix  $A$  auf  $x$  dadurch beeinflusst wird, wodurch folgt, dass die nichtsinguläre, affine Abbildung  $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch

$$f_{A,b}(x) := f_{A,0}(x) + b, \quad (2.7)$$

letztendlich eine simple Translation von  $f_{A,0}(x)$  um  $b$  beschreibt. (vgl. [Spi], S. 2)  $\square$

**(2.8) Satz** (*Bijektivität einer nichtsingulären, affinen Abbildung*)

Eine nichtsinguläre, affine Abbildung  $f$  ist bijektiv.

*Beweis:* Sei  $f$  eine nichtsinguläre, affine Abbildung. Zeige, dass  $f$  bijektiv ist, indem Injektivität und Surjektivität nachgewiesen werden.

(i) Zur Injektivität: Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , dann folgt aus  $f(x) = f(y)$  für alle  $x, y$

$$f(x) = Ax + b = Ay + b = f(y) \quad (2.8)$$

und somit

$$x = y. \quad (2.9)$$

(ii) Zur Surjektivität: Sei  $y \in \mathbb{R}^n$ , dann existiert ein  $x \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $f(x) = y$  gilt. Da

$$f^{-1}(\{y\}) = \{A^{-1}(y - b)\} \quad (2.10)$$

ist, setze also

$$x := A^{-1}(y - b), \quad (2.11)$$

womit folgt:

$$f(x) = f(A^{-1}(y - b)) = \underbrace{AA^{-1}}_{=E_n}(y - b) + b = y. \quad (2.12)$$

Dabei beschreibt  $(\cdot)^{-1}$  das Inverse einer Matrix und  $E_n$  die Einheitsmatrix. In diesem Fall ist dies auch wohldefiniert, denn  $A$  ist nach Definition (2.6) nichtsingulär und somit invertierbar.

Da  $f$  injektiv und surjektiv ist, folgt insgesamt, dass  $f$  bijektiv ist.  $\square$

**(2.9) Satz** (*Bild eines konvexen Körpers*)

Das Bild eines konvexen Körpers  $K$  unter einer nichtsingulären, affinen Abbildung  $f$  ist wieder ein konvexer Körper.

*Beweis:* Seien  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexer Körper und  $f$  eine nichtsinguläre, affine Abbildung. Zeige, dass  $f(K)$  ein konvexer Körper ist. Verwende dazu Definition (2.3).

(i) Zeige,  $f(K)$  ist konvex:

Seien  $x, y \in K$  und  $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , dann folgt mit Definition (2.1) und (2.5):

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = f(\lambda x) + f((1 - \lambda)y) \quad (2.13)$$

$$= f(\underbrace{\lambda x + (1 - \lambda)y}_{\in K}) \in f(K) \quad (2.14)$$

(ii) Zeige,  $f(K)$  ist kompakt:

Da  $f$  insbesondere eine affine Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen ist, ist  $f$  auch stetig. Somit ist die Aussage durch den folgenden, bekannten Satz aus der Analysis gezeigt: Das Bild einer kompakten Menge ist unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt.

(iii) Zeige, dass  $\text{int}(f(K)) \neq \emptyset$  gilt:

Diese Aussage ist klar, denn angenommen es gelte  $\text{int}(f(K)) = \emptyset$ , dann folgt daraus sofort, dass  $f(K)$  nicht konvex ist und dies steht im Widerspruch zu (i).

Somit ist der Satz bewiesen. (vgl. [Mar], S. 2)  $\square$

**(2.10) Beispiel** (*Bild eines konvexen Körpers*)

Seien  $K := \triangle z_1 z_2 z_3$  ein Dreieck mit den Eckpunkten  $z_1 := (-\sqrt{3}, -1)$ ,  $z_2 := (\sqrt{3}, -1)$  und  $z_3 := (0, 2)$  und  $f_{A,b}$  eine nichtsinguläre, affine Abbildung definiert durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Dann ergibt sich die nachfolgend dargestellte Transformation von  $K$  zu  $\tilde{K} := f(K)$  in Abbildung 2.3.

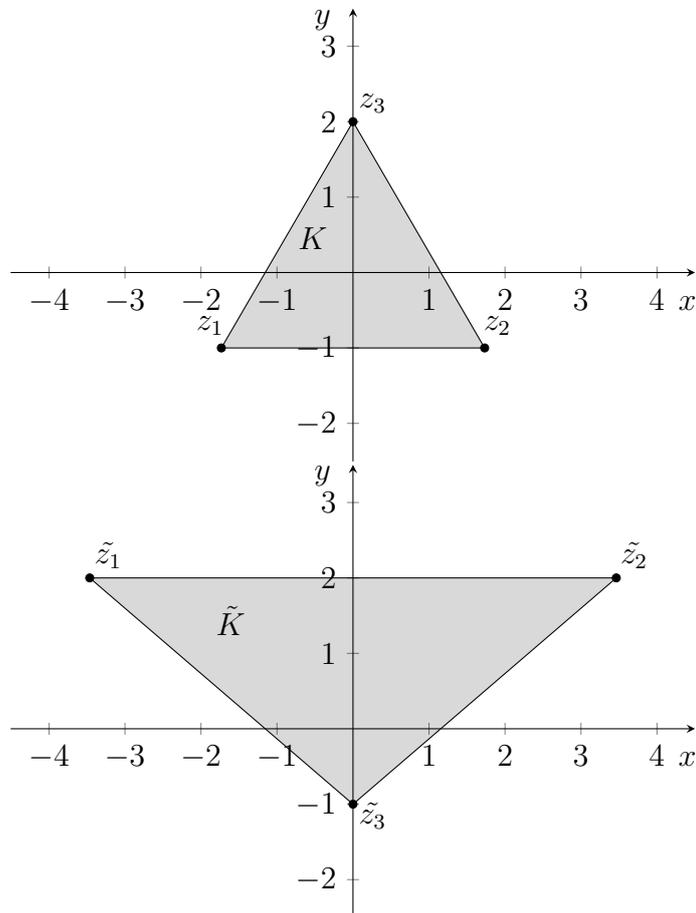


Abbildung 2.3: Transformation von  $K \xrightarrow{f} \tilde{K}$

Dabei ist zu festzustellen, dass die Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  eine Streckung in  $x$ -Richtung um den

Faktor 2 und eine Spiegelung an der  $x$ -Achse bewirkt. Der Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sorgt anschließend für eine Verschiebung um eine Einheit in  $y$ -Richtung. Es sind also die beschriebenen Eigenschaften aus Bemerkung (2.7) zu erkennen und insbesondere ist zu bemerken, dass die Seiten in Seiten und die Eckpunkte in Eckpunkte übergehen. Zusätzlich ist auch der Erhalt der Konvexität unter dieser Transformation, wie schon in Satz (2.9) gezeigt, gewahrt. (vgl. [Wer], S. 37 und 39)

# 3 Löwner-John-Ellipsoide

In diesem Kapitel werden nun Ellipsoide eingeführt und speziell Löwner-John-Ellipsoide präsentiert, deren Existenz auf den zuvor betrachteten Eigenschaften konvexer Mengen basieren. Diese Gegebenheit bildet die übergeordnete Struktur, die im weiteren Verlauf bei der Steiner-Inellipse wieder aufgegriffen wird. Für die Betrachtung jener Ellipsoide wird nach wie vor der reelle,  $n$ -dimensionale Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit  $n < \infty$  verwendet.

### (3.1) Definition (Euklidische Einheitskugel)

Sei  $B[m; r]$  eine Menge, die alle Punkte um einen Mittelpunkt  $m \in \mathbb{R}^n$  mit einem Radius kleiner oder gleich  $r \in \mathbb{R}$  enthält und wie folgt definiert:

$$B[m; r] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - m\|_2 \leq r\}, \quad (3.1)$$

wobei  $\|\cdot\|_2$  der euklidischen Norm entspricht. Falls nun für den Mittelpunkt  $m = \mathbf{0}$  und den Radius  $r = 1$  gilt, dann heißt  $B[\mathbf{0}; 1]$  *euklidische Einheitskugel*.

### (3.2) Definition (Ellipsoid)

Seien  $B[\mathbf{0}; 1]$  die euklidische Einheitskugel und  $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine nichtsinguläre, affine Abbildung wie in (2.6) definiert. Dann heißt  $E$ , gegeben durch

$$E = f_{A,b}(B[\mathbf{0}; 1]) = A(B[\mathbf{0}; 1]) + b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|A^{-1}(x - b)\|_2 \leq 1\}, \quad (3.2)$$

*Ellipsoid*. Dabei entspricht  $b \in \mathbb{R}^n$  dem *Mittelpunkt des Ellipsoids*.

Ein solches Ellipsoid ist wohldefiniert aufgrund der Wohldefiniertheit der Abbildung  $f_{A,b}$ .

### (3.3) Bemerkung (Eindeutigkeit der Abbildung)

Die Abbildung  $f_{A,b}$  ist durch ein Ellipsoid  $E$ , wie in (3.2) definiert, eindeutig bestimmt.

*Beweis:* Seien  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei nichtsinguläre, affine Abbildungen, gegeben durch

$$f_1(x) = A_1x + b_1 \quad \text{und} \quad (3.3)$$

$$f_2(x) = A_2x + b_2 \quad (3.4)$$

und  $B[\mathbf{0}; 1]$  die euklidische Einheitskugel. Ferner sei ein Ellipsoid  $E$  durch die zwei Abbildungen  $f_1, f_2$  gegeben:  $E = f_1(B[\mathbf{0}; 1])$  und  $E = f_2(B[\mathbf{0}; 1])$ . Zeige, dass  $f_1 = f_2$  gilt.

(i) Betrachte zunächst  $\mathbf{0} \in B[\mathbf{0}; 1] \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt:

$$f_1(\mathbf{0}) = A_1 \cdot \mathbf{0} + b_1 = b_1 = b_2 = A_2 \cdot \mathbf{0} + b_2 = f_2(\mathbf{0}). \quad (3.5)$$

(ii) Gelte nun  $b_1 = b_2$  aufgrund von (i), dann gilt für ein beliebiges  $x \in B[\mathbf{0}; 1] \subset \mathbb{R}^n$ :

$$f_1(x) = A_1 \cdot x + b_1 = A_2 \cdot x + b_1 = f_2(x) \Rightarrow A_1 = A_2. \quad (3.6)$$

Da  $A_1 = A_2$  und  $b_1 = b_2$  gilt, folgt  $f_1 = f_2$  und somit ist die Abbildung eindeutig bestimmt.  $\square$

Als nächstes wird die Existenz eines Ellipsoids mit größtmöglichem Volumen gefolgert, das vollständig in einem konvexen Körper enthalten ist und somit dem Körper eingeschrieben ist.

**(3.4) Definition** (*Löwner-John-Ellipsoid*)

Seien  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexer Körper und  $E \subseteq K$  ein in  $K$  enthaltenes Ellipsoid, dann heißt  $E$  *Löwner-John-Ellipsoid*, wenn  $E$  die Eigenschaft maximalen Volumens besitzt.

**(3.5) Beispiel** (*Löwner-John-Ellipsoid*)

Die nachfolgende Abbildung 3.1 zeigt einen konvexen Körper  $K \subset \mathbb{R}^2$  mit einem eingeschriebenen Ellipsoid  $E \subseteq K$ . Das Volumen des Ellipsoids  $E$  ist im konvexen Körper  $K$  maximal, das heißt, es gibt kein weiteres Ellipsoid in  $K$  mit größerem Volumen. Somit ist das gezeigte Ellipsoid  $E$  nach Definition (3.4) ein Löwner-John-Ellipsoid.

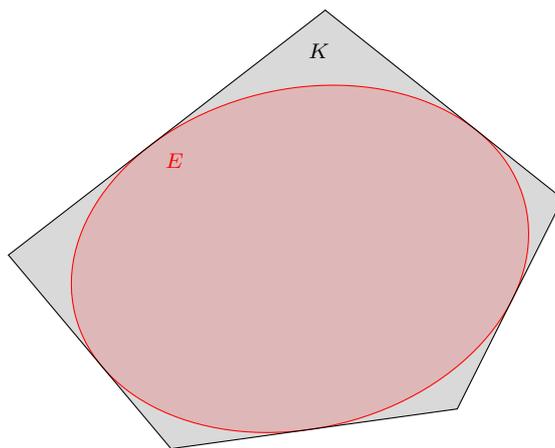


Abbildung 3.1: Löwner-John-Ellipsoid

**(3.6) Satz** (*Existenz eines Löwner-John-Ellipsoids*)

Jeder konvexe Körper  $K \subset \mathbb{R}^n$  besitzt ein Löwner-John-Ellipsoid  $E \subseteq K$ .

*Beweis:* Seien  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexer Körper und  $f_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine nichtsinguläre, affine Abbildung mit beliebiger Matrix  $A$  und beliebigem Vektor  $b$  gemäß Definition (2.6). Sei ferner zudem  $N := n^2 + n$ . Dann ist die Menge der geordneten Paare  $(A, b)$  bestehend aus der nichtsingulären Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{R}^{n^2}$  und dem Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  gerade  $\mathbb{R}^N$ . Definiere weiter die Menge aller Paare  $(A, b)$ , aus denen durch  $f_{A,b}$  ein Ellipsoid in  $K$  entsteht wie folgt:

$$\mathcal{E} := \{(A, b) \in \mathbb{R}^N \mid A(B[\mathbf{0}; 1]) + b = f_{A,b}(B[\mathbf{0}; 1]) \subset K\}. \quad (3.7)$$

Diese Menge  $\mathcal{E}$  ist eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$ , weil sie beschränkt und abgeschlossen ist. Die Beschränktheit von  $\mathcal{E}$  folgt aus der Beschränktheit von  $K$ , welche die Anzahl an Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n^2}$  und Vektoren  $b \in \mathbb{R}^n$  beschränkt, sodass ein Ellipsoid in  $K$  entsteht. Für die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{E}$  wird ein Paar  $(A_i, b_i) \in \mathbb{R}^N$  mit  $i \in \mathbb{N}$  bestehend aus konvergenten Folgen betrachtet, für die

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (A_i, b_i) := (A, b) \in \mathbb{R}^N \quad (3.8)$$

gilt. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (A_i x + b_i) = Ax + b \in K \quad (3.9)$$

gilt und somit der Grenzwert  $(A, b) \in \mathcal{E}$  ist, wodurch die Abgeschlossenheit bewiesen ist. Da ein Ellipsoid  $E$  das Bild der euklidischen Einheitskugel unter einer nichtsingulären, affinen Abbildung  $f_{A,b}$  ist, gilt für das Volumen des Ellipsoids

$$\text{Vol}(E) = |\det(A)| \cdot \text{Vol}(B[\mathbf{0}; 1]). \quad (3.10)$$

Ferner ist die Abbildung  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(A, b) \mapsto |\det(A)|$  eine stetige Abbildung auf  $\mathcal{E}$ , da  $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \pi(n \times n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$  gilt, wobei die Abbildung  $\pi$  in den projektiven Raum stetig ist und die Abbildung auf das Polynom der Determinante ebenfalls stetig ist. Dadurch gibt es also ein Paar  $(\tilde{A}, \tilde{b})$ , sodass  $g$  auf  $\mathcal{E}$  maximal wird. Daraus folgt schließlich, dass es ein Ellipsoid  $\tilde{E} := \tilde{A}(B[\mathbf{0}; 1]) + \tilde{b}$  gibt, das maximales Volumen in  $K$  besitzt und somit ein Löwner-John-Ellipsoid ist. (vgl. [How], S. 2f.)  $\square$

Es kann weiter gezeigt werden, dass das Löwner-John-Ellipsoid eines konvexen Körpers auch eindeutig ist. Aber dies wird hier im Allgemeinen nicht bewiesen, da im Folgenden nur zwei-dimensionale Körper betrachtet werden und dort ein Beweis der Eindeutigkeit folgt.

## 4 Steiner-Inellipse

In diesem Kapitel werden nun die vorangegangenen Inhalte über Ellipsoide auf den zweidimensionalen Raum der euklidischen Standardebene  $\mathbb{R}^2$  reduziert, um sich mit einem ganz speziellen Ellipsoid, der Steiner-Inellipse und dessen Eigenschaften, zu beschäftigen. Dazu werden auch wieder einige elementare Definitionen und Sätze zu Ellipsen im Allgemeinen thematisiert. Um die Steiner-Inellipse als geometrische Anordnung für den nachfolgenden Satz von Marden aufzufassen, wird die euklidische Standardebene  $\mathbb{R}^2$  im Verlauf mit der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  identifiziert werden.

### (4.1) Definition (*Einheitskreisscheibe*)

Sei  $B[\mathbf{0}; 1]$  eine euklidische Einheitskugel wie in (3.1) definiert. Dann heißt  $B[\mathbf{0}; 1]$  insbesondere *Einheitskreisscheibe*, falls für die Dimension  $n = 2$  und somit  $B[\mathbf{0}; 1] \subset \mathbb{R}^2$  gilt.

### (4.2) Definition (*Ellipse*)

Sei  $E$  ein Ellipsoid wie in (3.2) definiert. Dann heißt  $E$  insbesondere *Ellipse*, falls für die Dimension  $n = 2$  und somit  $E \subset \mathbb{R}^2$  gilt.

### (4.3) Bemerkung (*Ellipsoid und Ellipse*)

Eine Ellipse ist also im Grunde das zweidimensionale Analogon eines Ellipsoids. Dabei ist zu beachten, dass eine Ellipse auch das Innere der Menge meint und nicht nur den Rand. (vgl. [Wer], S. 37)

### (4.4) Definition (*Steiner-Inellipse*)

Sei  $K := \triangle_{z_1 z_2 z_3} \subset \mathbb{R}^2$  nun ein Dreieck mit den Eckpunkten  $z_1, z_2, z_3$  in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{R}^2$ . Dann heißt die Ellipse  $S$  *Steiner-Inellipse zu  $K$* , falls sie dem Dreieck  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  eingeschrieben ist und die Seiten des Dreiecks  $\triangle_{z_1 z_2 z_3}$  jeweils in den Mittelpunkten berührt.

### (4.5) Beispiel (*Steiner-Inellipse*)

Die nachfolgende Abbildung 4.1 zeigt ein Dreieck  $K \subset \mathbb{R}^2$ , dem eine Ellipse  $S$  eingeschrieben ist. Diese berührt jeweils die Seitenmittelpunkte des Dreiecks  $K$ . Somit ist die dargestellte

Ellipse  $S$  die Steiner-Inellipse zu  $K$ .

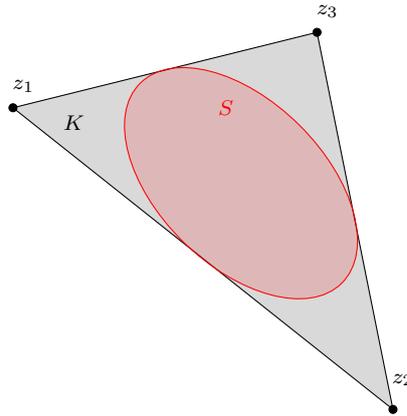


Abbildung 4.1: Steiner-Inellipse

**(4.6) Satz** (*Existenz einer Steiner-Inellipse*)

Es existiert zu jedem Dreieck  $K := \triangle_{z_1 z_2 z_3} \subset \mathbb{R}^2$  eine Steiner-Inellipse  $S$  und diese ist eindeutig bestimmt.

*Beweis:* Sei  $K := \triangle_{z_1 z_2 z_3} \subset \mathbb{R}^2$  ein Dreieck mit den folgenden Eckpunkten  $z_1 := (x_1, 0)$  und  $z_2 := (x_2, 0)$  auf der x-Achse, wobei  $x_1 < x_2$  gilt und  $z_3 := (x_3, y_3)$  mit  $y_3 > 0$  ist. Dieses Dreieck  $K$  ist Repräsentant jedes Dreiecks in der euklidischen Standardebene  $\mathbb{R}^2$ , denn das Koordinatensystem kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in beschriebener Form passend zum Dreieck  $K$  gewählt werden oder aber das Dreieck  $K$  kann mittels Verschiebung und Drehung durch eine nichtsinguläre, affine Abbildung in die genannte Form gebracht werden. Ferner sei nun  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(x) := \begin{pmatrix} 1 & \frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_3}{y_3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(x_2-x_1)}{y_3} \end{pmatrix} x \quad (4.1)$$

eine nichtsinguläre, affine Abbildung, die das beliebige Dreieck  $K$  zu einem gleichseitigen Dreieck  $\tilde{K} := \triangle_{z_1 z_2 \tilde{z}_3}$  transformiert. Dabei bleiben die Eckpunkte  $z_1$  und  $z_2$  fest und  $z_3$  wird auf  $\tilde{z}_3 := (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1))$  abgebildet:

$$f(z_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_3}{y_3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{(x_2-x_1)}{y_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_3 \\ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Die darauffolgende Abbildung 4.2 visualisiert die zuvor beschriebene Transformation von  $K$  zu  $\tilde{K} = f(K)$ .

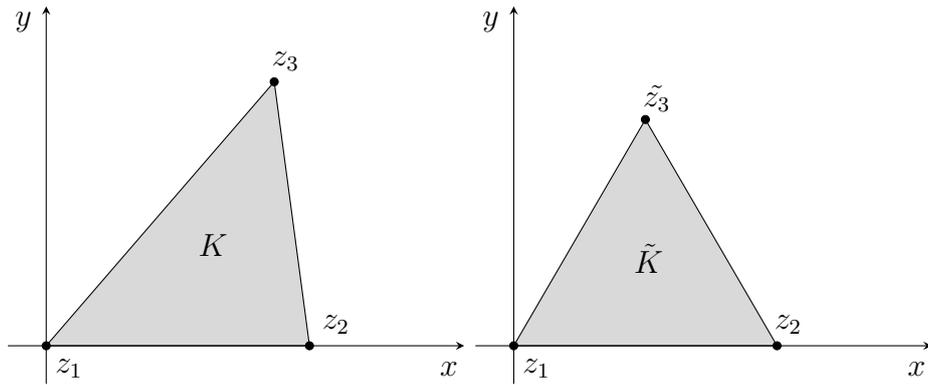


Abbildung 4.2: Transformation von  $K \xrightarrow{f} \tilde{K}$

Mit dem bekannten Satz des Pythagoras ist auch schnell ersichtlich, dass  $\tilde{K}$  gleichseitig ist, da für die Seitenlänge  $l := x_2 - x_1$  und die Höhe  $h := \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1)$  offenbar

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1)\right)^2 \quad (4.3)$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + \frac{3(x_2 - x_1)^2}{4} \quad (4.4)$$

$$= (x_2 - x_1)^2 = l^2 \quad (4.5)$$

gilt. Aufgrund der Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks  $\tilde{K}$  ist leicht zu erkennen, dass eine Ellipse  $\tilde{S} \subseteq \tilde{K}$  existiert, die genau die Seitenmittelpunkte des Dreiecks berührt. Diese Ellipse entspricht gerade einer Kreisscheibe, deren Rand mit dem sogenannten Inkreis des Dreiecks übereinstimmt. Es gibt ferner auch keine weitere solche Ellipse, denn eine Ellipse ist schon durch fünf Bedingungen, wie Punkte und Tangenten, eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich nach der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnittes für die Ellipse in diesem konkreten Fall:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0, \quad (4.6)$$

wobei  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$  den Koeffizienten entsprechen. Diese sind durch die drei Seitenmittelpunkte und die drei Seiten als Tangenten, also insgesamt sechs Eigenschaften, überbestimmt und somit eindeutig. Es existiert somit zu jenem Dreieck  $\tilde{K}$  genau eine Steiner-Inellipse. Infolge des Satzes (2.8) gibt es nun eine inverse Abbildung  $f^{-1}$ , die das Dreieck  $\tilde{K}$  mit der zugehörigen Steiner-Inellipse  $\tilde{S}$  wieder zurück in das Dreieck  $K$  transformiert, wobei die Ellipse  $\tilde{S}$  in die Steiner-Inellipse  $S$  zu  $K$  übergeht. Die nachfolgende Abbildung 4.3 stellt jene Transformation dar. Mithilfe des Beispiels (2.10) wird zudem auch verständlich, dass Seitenmittelpunkte in Seitenmittelpunkte übergehen. Dadurch überträgt sich die Eindeutigkeit im gleichseitigen Dreieck auf alle beliebigen Dreiecke. Somit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Steiner-Inellipse zu einem Dreieck bewiesen. (vgl. [Wer], S. 37 und [Wik])  $\square$

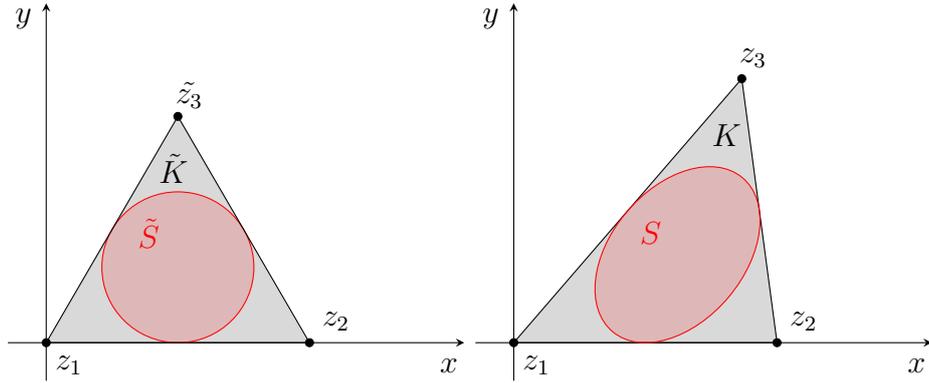


Abbildung 4.3: Transformation von  $\tilde{K} \xrightarrow{f^{-1}} K$  und  $\tilde{S} \xrightarrow{f^{-1}} S$

Im Weiteren werden zwei geometrische Eigenschaften einer Ellipse charakterisiert, die so dann zur Verifikation weiterer Eigenschaften benötigt werden.

**(4.7) Definition** (*große und kleine Halbachse*)

Sei  $E \subset \mathbb{R}^2$  eine Ellipse mit Mittelpunkt  $b \in \mathbb{R}^2$  wie in (4.2) definiert. Dann heißen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\alpha := \max_{x \in \partial E} |x - b| \quad \text{und} \quad \beta := \min_{x \in \partial E} |x - b| \quad (4.7)$$

*große Halbachse von E* und *kleine Halbachse von E*, wobei  $\partial(\cdot)$  der Randmenge einer Menge entspricht. Die darauf folgende Abbildung 4.4 veranschaulicht die entsprechenden Halbachsen und den Mittelpunkt einer Ellipse.

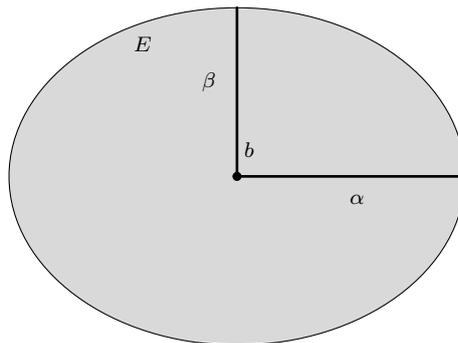


Abbildung 4.4: große und kleine Halbachse einer Ellipse

**(4.8) Definition** (*Brennpunkte einer Ellipse*)

Sei  $E \subset \mathbb{R}^2$  eine Ellipse wie in (4.2) definiert mit großer Halbachse  $\alpha$ . Dann heißen  $q_{1,2} \in E$  *Brennpunkte von  $E$* , falls für alle Punkte  $x \in \partial E$

$$|x - q_1| + |x - q_2| = 2\alpha \quad (4.8)$$

gilt. Das bedeutet, die Summe der Abstände von einem beliebigen Randpunkt zu den jeweiligen Brennpunkten konstant ist. Die nachfolgende Abbildung 4.5 verdeutlicht diese Eigenschaft. Wird der Randpunkt  $x$  in der Betrachtung so gewählt, dass  $x, q_1, q_2$  kollinear sind, so ist schnell ersichtlich, dass die besagte Summe der Abstände mit der Konstanten  $2\alpha$  übereinstimmt.

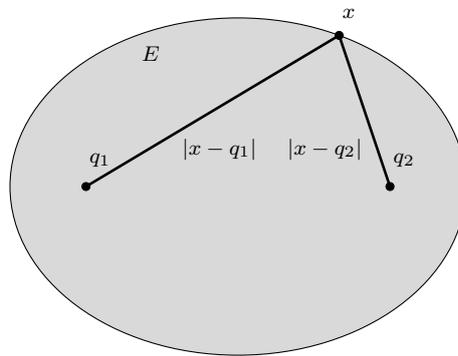


Abbildung 4.5: Brennpunkte einer Ellipse

Mithilfe dieser Eigenschaften wird als nächstes bewiesen, dass die Steiner-Inellipse zu einem Dreieck maximales Volumen besitzt und deshalb auch ein Löwner-John-Ellipsoid ist.

**(4.9) Satz** (*Steiner-Inellipse ist ein Löwner-John-Ellipsoid*)

Die Steiner-Inellipse  $S$  zu einem Dreieck  $K$  ist ein Löwner-John-Ellipsoid.

*Beweis:* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann nach den Sätzen (2.9) und (4.6) wieder ein gleichseitiges Dreieck betrachtet werden, das durch eine nichtsinguläre, affine Transformation eines beliebigen Dreiecks entstanden ist. Sei also  $K := \triangle z_1 z_2 z_3 \subset \mathbb{R}^2$  ein Dreieck mit den Eckpunkten  $z_1 := (3, 0)$ ,  $z_2 := (0, \sqrt{3})$  und  $z_3 := (0, -\sqrt{3})$ . Dann ist  $K$  offensichtlich konvex und die Steiner-Inellipse  $S$  zu  $K$  ist gerade die Einheitskreisscheibe um den Mittelpunkt  $(1, 0)$ . Diese Anordnung ist in Abbildung 4.6 zu sehen.

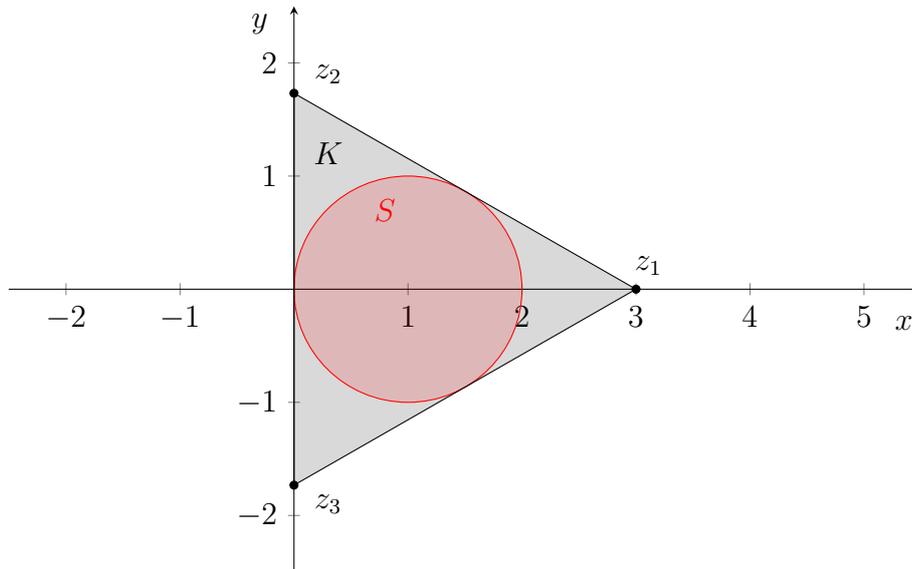


Abbildung 4.6: Dreieck  $K$  mit Steiner-Inellipse  $S$

Es genügt nun zu zeigen, dass  $S = B[(1, 0); 1]$  maximales Volumen besitzt. Dazu wird der Einfachheit halber nur die obere Hälfte des Dreiecks  $K$  im ersten Quadranten des Koordinatensystems betrachtet. Die obere Seitenlänge des Dreiecks  $K$  lässt sich dann durch folgende Abbildung  $h : [0, 3] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben:

$$h(x) := -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \sqrt{3}. \quad (4.9)$$

Ferner sei  $E$  eine Ellipse mit Halbachsen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\alpha, \beta > 0$ . Dann lässt sich der oberen Rand der Ellipse  $\partial E$  durch die Abbildung  $k : [0, 3] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  darstellen:

$$k(x) := \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - (x - \alpha)^2}. \quad (4.10)$$

Damit die Ellipse  $E$  dem Dreieck  $K$  eingeschrieben ist, müssen die nachfolgenden Bedingungen für einen Berührungspunkt  $x_0 \in [0, 3] \subset \mathbb{R}$  erfüllt sein:

- (i)  $h(x_0) = k(x_0)$  und
- (ii)  $h'(x_0) = k'(x_0)$ .

Aus diesem Gleichungssystem, folgt nach typisierten Rechnungen schließlich die Beziehung

$$\alpha = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}. \quad (4.11)$$

Weiter ist dann das Volumen der Ellipse  $E$  durch

$$\begin{aligned}\text{Vol}(E) &= \alpha\beta\pi \\ &= \left(-\frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\right)\beta\pi \\ &= \left(-\frac{\beta^3}{2} + \frac{3\beta}{2}\right)\pi\end{aligned}\tag{4.12}$$

gegeben. Demzufolge lässt sich nun  $\text{Vol}(E)$  maximieren:

$$(\text{Vol}(E))' = \frac{3\pi}{2}(-\beta^2 + 1) = 0 \Rightarrow \beta = 1,\tag{4.13}$$

$$(\text{Vol}(E))'' = -3\beta\pi = -3\pi < 0 \Rightarrow \text{Maximum}.\tag{4.14}$$

Mit  $\beta = 1$  gilt nach Gleichung (4.11) auch  $\alpha = 1$ . Das bedeutet, dass die Ellipse  $E$  zwei Halbachsen der Länge 1 besitzt und somit der Einheitskreisscheibe  $S = B[(1,0);1]$  entspricht. Folglich ist gezeigt, dass die Steiner-Inellipse  $S \subset K$  maximales Volumen besitzt und diese Aussage lässt sich auf Steiner-Inellipsen beliebiger Dreiecke übertragen, weil durch nichtsinguläre, affine Transformationen alle Volumina mit demselben Faktor multipliziert werden. Somit ist der Satz bewiesen. (vgl. [Min], S. 685f. und [Wer], S. 38)  $\square$

**(4.10) Bemerkung** (*Einführung in die komplexe Zahlenebene*)

Im weiteren Verlauf wird nun die euklidische Standardebene  $\mathbb{R}^2$  mit der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  identifiziert. Dazu werden die bereits bekannten Objekte wie folgt überführt:

- (i) Ein Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist künftig eine komplexe Zahl der Form  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .
- (ii) Eine nichtsinguläre, affine Abbildung  $f_{T,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist fortan identifiziert durch eine Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Form

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C,\tag{4.15}$$

wobei  $A, B, C \in \mathbb{C}$  mit  $A \neq 0, B \neq 0$  gilt und  $\bar{\cdot}$  der komplexen Konjugation entspricht. Das ist nachvollziehbar durch folgende Betrachtung: Seien  $A = a_1 + ia_2, B = b_1 + ib_2$  und die Matrix  $T$  der Abbildung  $f_{T,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$T = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}\tag{4.16}$$

gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f_{T,b}(x) &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \\
&= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y \\ (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{pmatrix} + b \\
&\simeq (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i(a_2 + b_2)x + i(a_1 - b_1)y + b \\
&= \underbrace{(a_1 + ia_2)}_{=A} \underbrace{(x + iy)}_{=z} + \underbrace{(b_1 + ib_2)}_{=B} \underbrace{(x - iy)}_{=\bar{z}} + \underbrace{b}_{=C} \\
&= f(z).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dabei ist die Matrix  $T$  genau dann nichtsingulär, wenn

$$0 \neq \det(T) = a_1^2 - b_1^2 - (b_2^2 - a_2^2) = (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2) = |A|^2 - |B|^2 \tag{4.18}$$

gilt. Daraus folgt, dass  $f$  genau dann bijektiv ist, wenn  $|A| \neq |B|$  zutrifft. Demnach ist naheliegend, dass  $f$  auch wie  $f_{T,b}$  operiert, also eine nullpunkterhaltene Transformation mit anschließender Translation bewirkt.

(iii) Die euklidische Einheitskreisscheibe ist in der komplexen Zahlenebene durch

$$B[0; 1] := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \tag{4.19}$$

gegeben. Nach Definition (3.2) und (ii) beschreibt das Bild der Einheitskreisscheibe  $B[0; 1]$  unter einer bijektiven, affinen Abbildung  $f$  eine Ellipse mit Mittelpunkt  $C$ .

(vgl. [Wer], S. 39)

Als nächstes werden mehrere charakteristische Eigenschaften einer Ellipse in der komplexen Zahlenebene verifiziert. Mittels der folgenden Sätze wird dann der Satz von Marden bewiesen.

**(4.11) Satz** (*Charakteristische Größen einer Ellipse*)

Das Bild der Einheitskreisscheibe  $B[0; 1]$  unter einer bijektiven, affinen Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Form  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$ , wobei  $A, B, C \in \mathbb{C}$  und  $A \neq 0, B \neq 0$  gilt, ist eine Ellipse  $E$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i) der Mittelpunkt von  $E$  entspricht gerade  $C$ ,
- (ii) die Länge der großen bzw. kleinen Halbachse von  $E$  beträgt  $|A| + |B|$  bzw.  $||A| - |B||$ ,
- (iii) die Brennpunkte von  $E$  entsprechen  $q_{1,2} := C \pm 2\sqrt{AB}$ .

*Beweis:* Seien  $B[0; 1]$  die Einheitskreisscheibe,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine bijektive, affine Abbildung wie oben bereits definiert und  $E := f(B[0; 1])$  eine Ellipse.

(i) Zeige, dass der Mittelpunkt von  $E$  gerade  $C$  ist:

Diese Aussage ist nach Bemerkung (4.10) klar, denn es gilt offenbar für den Mittelpunkt  $0 \in B[0; 1] \subset \mathbb{C}$ , der in den Mittelpunkt der Ellipse  $E$  übergeht, weil  $f$  den Nullpunkt festhält:

$$f(0) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = C. \quad (4.20)$$

(ii) Zeige, dass die Längen der großen und kleinen Halbachse von  $E$  durch  $|A| + |B|$  und  $||A| - |B||$  gegeben sind:

Sei zunächst  $M := B[0; 1]$ . Dann ist  $r : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$r(t) := e^{it}, \quad (4.21)$$

eine Parametrisierung der Randmenge  $\partial M$ . Seien ferner  $\alpha$  die große Halbachse von  $E$  und  $\beta$  die kleine Halbachse von  $E$  wie in (4.7) definiert. Dann gilt

$$\alpha = \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(e^{it}) - C| \quad \text{und} \quad \beta = \min_{t \in [0, 2\pi]} |f(e^{it}) - C|. \quad (4.22)$$

Weiter seien  $A := |A|e^{i\theta}$  und  $B := |B|e^{i\phi}$  mit  $\theta, \phi \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$  zwei komplexe Zahlen in Polardarstellung. Dann ergibt sich daraus die nachfolgende Ungleichung:

$$||A| - |B|| \leq |f(e^{it}) - C| = |Ae^{it} + Be^{-it}| = ||A|e^{i(\theta+t)} + |B|e^{i(\phi-t)}| \leq |A| + |B|. \quad (4.23)$$

Es bleibt nun also zu zeigen, dass das Maximum  $|A| + |B|$  und das Minimum  $||A| - |B||$  auch wirklich angenommen werden. Dies ist durch Einsetzen ersichtlich, es gilt nämlich

$$|f(e^{it}) - C| = \begin{cases} |A| + |B|, & \text{falls } t = \frac{\phi - \theta}{2} \text{ oder } t = \frac{\phi - \theta}{2} + \pi, \\ ||A| - |B||, & \text{falls } t = \frac{\phi - \theta}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ oder } t = \frac{\phi - \theta}{2} + \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Somit folgt für die Halbachsen von  $E$ , dass  $\alpha = |A| + |B|$  und  $\beta = ||A| - |B||$  gilt.

(iii) Zeige, dass die Brennpunkte von  $E$  durch  $q_{1,2} = C \pm 2\sqrt{AB}$  gegeben sind:

Sei  $\alpha$  die große Halbachse von  $E$  und parametrisiere  $f(r)$  wie in (ii) die Randmenge  $\partial E$ . Des Weiteren folgt dann aus (ii) und aus

$$e^{i\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{|A|}} \quad \text{und} \quad e^{i\frac{\phi}{2}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{|B|}} \quad (4.25)$$

folgender Zusammenhang, der in der anschließenden Rechnung verwendet wird:

$$f\left(e^{i\frac{\phi-\theta}{2}}\right) = (|A| + |B|)e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} + C = C + \frac{|A| + |B|}{\sqrt{|A||B|}}\sqrt{AB}. \quad (4.26)$$

Es gilt nach Definition (4.8) für die Brennpunkte  $q_{1,2}$ :

$$\underbrace{|f(e^{it}) - q_1| + |f(e^{it}) - q_2|}_{:=g(t)} = 2\alpha. \quad (4.27)$$

Das wird im Folgenden nachgerechnet:

$$\begin{aligned} g(t) &= \left|f(e^{it}) - (C + 2\sqrt{AB})\right| + \left|f(e^{it}) - (C - 2\sqrt{AB})\right| \\ &= \left||A|e^{i(\theta+t)} + |B|e^{i(\phi-t)} - 2\sqrt{|A||B|}e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\right| + \left||A|e^{i(\theta+t)} + |B|e^{i(\phi-t)} + 2\sqrt{|A||B|}e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}\right| \\ \text{Substituiere nun } t &= \frac{\phi - \theta}{2 + s}: \\ &= \left||A|e^{is} + |B|e^{-is} - 2\sqrt{|A||B|}\right| + \left||A|e^{is} + |B|e^{-is} - 2\sqrt{|A||B|}\right| \\ &= \left|(\sqrt{|A|}e^{i\frac{s}{2}} - \sqrt{|B|}e^{-i\frac{s}{2}})^2\right| + \left|(\sqrt{|A|}e^{i\frac{s}{2}} + \sqrt{|B|}e^{-i\frac{s}{2}})^2\right| \\ &= \left|\sqrt{|A|}e^{i\frac{s}{2}} - \sqrt{|B|}e^{-i\frac{s}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{|A|}e^{i\frac{s}{2}} + \sqrt{|B|}e^{-i\frac{s}{2}}\right|^2 \\ &= (\sqrt{|A|} - \sqrt{|B|})^2 \underbrace{\left(\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{2}\right)\right)}_{=1} + (\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|})^2 \underbrace{\left(\sin^2\left(\frac{s}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{2}\right)\right)}_{=1} \\ &= |A| - 2\sqrt{|A||B|} + |B| + |A| + 2\sqrt{|A||B|} + |B| \\ &= 2 \underbrace{(|A| + |B|)}_{=\alpha}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Also sind  $q_{1,2}$  die Brennpunkte von  $E$ .

Demzufolge ist der Satz bewiesen. (vgl. [Min], S. 683 und [Wer], S. 40f.)  $\square$

Hiernach wird mit letztem Ergebnis ein Ausdruck für die Brennpunkte der Steiner-Inellipse eines Dreiecks in Abhängigkeit der Eckpunkte in der komplexen Zahlenebene bestimmt.

**(4.12) Satz** (*Brennpunkte einer Steiner-Inellipse*)

Die Brennpunkte einer Steiner-Inellipse  $S$  zu einem Dreieck  $K := \triangle_{z_1 z_2 z_3} \subset \mathbb{C}$  mit den nichtkollinearen Eckpunkten  $z_1, z_2, z_3$  in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  sind durch

$$q_{1,2} := g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)} \quad (4.29)$$

gegeben, wobei  $g$ , definiert durch

$$g := \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \quad (4.30)$$

dem Mittelpunkt der Steiner-Inellipse  $S$  entspricht.

*Beweis:* Seien  $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$  eine dritte Einheitswurzel und  $\tilde{K} := \Delta\omega^0\omega^1\omega^2$  das von den dritten Einheitswurzeln erzeugte Dreieck. Dann ist ersichtlich, dass  $\tilde{S} := B[0; \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}B[0; 1]$  die Steiner-Inellipse von  $\tilde{K}$  ist. Die folgende Abbildung 4.7 visualisiert dies.

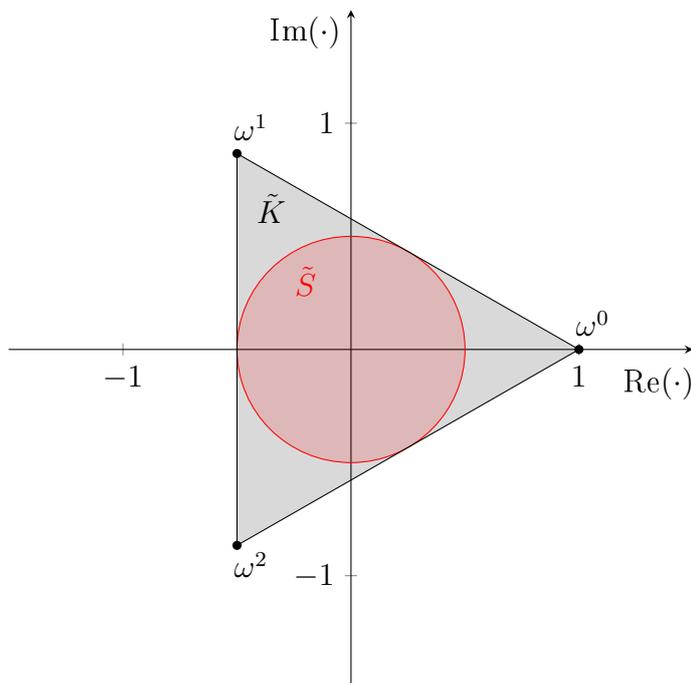


Abbildung 4.7: Dreieck  $\tilde{K}$  mit Steiner-Inellipse  $\tilde{S}$

Infolgedessen genügt es, eine bijektive, affine Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der aus Bemerkung (4.10) bekannten Form  $f(z) = Az + B\bar{z} + C$  zu konstruieren, sodass

$$f(\omega^0) = z_1, \quad f(\omega^1) = z_2 \quad \text{und} \quad f(\omega^2) = z_3 \quad (4.31)$$

gilt. Dann ist die Steiner-Inellipse  $S$  von  $K$  nämlich durch

$$S = f\left(\frac{1}{2}B[0; 1]\right) = \frac{1}{2}f(B[0; 1]) \quad (4.32)$$

gegeben und nach Satz (4.11) sind die Brennpunkte von  $S$  gerade  $q_{1,2} := C \pm 2\sqrt{AB}$ . Also bestimme nun die Koeffizienten  $A, B, C \in \mathbb{C}$  der Abbildung  $f$ . Durch die Bedingungen aus

Gleichung (4.31) ergibt sich mit  $\bar{\omega} = \omega^{-1}$  und  $\bar{\omega}^2 = \omega^{-2}$  folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega^{-1} & 1 \\ \omega^2 & \omega^{-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Da für dritte Einheitswurzeln  $1 + \omega + \omega^2 = 0$  gilt und weil auch  $\omega^{-1} = \omega^2$  und  $\omega^{-2} = \omega$  ist, folgt unmittelbar:

$$A = \frac{1}{3}(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3), \quad (4.34)$$

$$B = \frac{1}{3}(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3), \quad (4.35)$$

$$C = \underbrace{\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)}_{=g}. \quad (4.36)$$

Offensichtlich ist nach Satz (4.11) dann  $g := C$  der Mittelpunkt der Steiner-Inellipse  $S$ . Ferner lässt sich somit das Produkt  $AB$  berechnen und vereinfachen:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \underbrace{(\omega + \omega^2)}_{=-1}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)) \\ &= \frac{1}{9}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)) \\ &= \frac{1}{9}((z_1 + z_2 + z_3)^2 - 3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)) \\ &= g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Durch Einsetzen in  $q_{1,2} = C \pm 2\sqrt{AB}$  belaufen sich die Brennpunkte der Steiner-Inellipse  $S = f(\frac{1}{2}B[0; 1])$  von  $K$  auf

$$q_{1,2} = g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}. \quad (4.38)$$

Demnach ist auch dieser Satz bewiesen. (vgl. [Wer], S. 41ff.)  $\square$

**(4.13) Beispiel** (*Brennpunkte einer Steiner-Inellipse*)

Sei  $K := \triangle z_1 z_2 z_3$  ein Dreieck mit den Eckpunkten  $z_1 := 3 + i$ ,  $z_2 := 7 + 5i$  und  $z_3 := 1 + 7i$ . Dann ist der Mittelpunkt des Dreiecks  $K$  durch

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \\ &= \frac{1}{3}((3 + i) + (7 + 5i) + (1 + 7i)) \\ &= \frac{11}{3} + \frac{13}{3}i \end{aligned} \tag{4.39}$$

gegeben. Damit lassen sich auch die Brennpunkte der Steiner-Inellipse zu  $K$  berechnen:

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)} \\ &= \frac{11}{3} + \frac{13}{3}i \pm \sqrt{\left(\frac{11}{3} + \frac{13}{3}i\right)^2 - \frac{1}{3}\left(-\frac{16}{3} + \frac{98}{3}i\right)} \\ q_1 &= \frac{13}{3} + \frac{11}{3}i \\ q_2 &= 3 + 5i. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Die nachfolgende Abbildung 4.8 bestätigt und veranschaulicht die vorhergehenden Berechnungen.

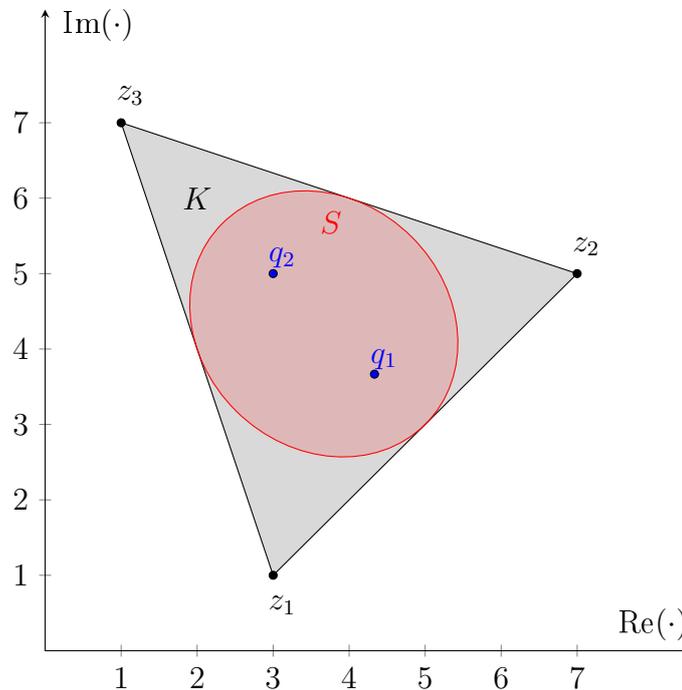


Abbildung 4.8: Brennpunkte der Steiner-Inellipse von  $K$

## 5 Satz von Marden

Zum Abschluss wird in diesem Kapitel die zuvor präsentierte Steiner-Inellipse als geometrische Anordnung für den Satz von Marden dargestellt, um den geometrischen Zusammenhang zwischen den Nullstellen eines komplexen Polynoms dritten Grades und den Nullstellen dessen Ableitung aufzuzeigen.

### (5.1) Satz (Satz von Marden)

Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  nichtkollineare Punkte in der komplexen Zahlenebene  $\mathbb{C}$  und  $p$  das durch die Nullstellen  $z_1, z_2, z_3$  erzeugte komplexe Polynom dritten Grades:

$$p(z) := (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3). \quad (5.1)$$

Dann sind die Nullstellen der Ableitung  $p'$  des Polynoms  $p$  die Brennpunkte der Steiner-Inellipse  $S$  zu dem von den Nullstellen  $z_1, z_2, z_3$  erzeugten konvexen Dreieck  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ .

*Beweis:* Sei  $p$  durch

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= z^3 - z^2 z_1 - z^2 z_2 - z^2 z_3 + z z_1 z_2 + z z_2 z_3 + z z_3 z_1 - z_1 z_2 z_3 \\ &= z^3 - z^2(z_1 + z_2 + z_3) + z(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) - z_1 z_2 z_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

gegeben. Dann folgt für die Ableitung  $p'$ :

$$p'(z) = 3z^2 - 2z(z_1 + z_2 + z_3) + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1). \quad (5.3)$$

Sei ferner  $g$  durch

$$g := \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad (5.4)$$

definiert.

Damit folgt für die Nullstellen von  $p'(z)$ :

$$z_{1,2} = \frac{6g \pm \sqrt{(-6g)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}}{2 \cdot 3} \quad (5.5)$$

$$= \frac{6g \pm 6\sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}}{6} \quad (5.6)$$

$$= g \pm \underbrace{\sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}}_{=:q_{1,2}}. \quad (5.7)$$

Offenbar sind die Nullstellen der Ableitung  $p'(z)$  nach Satz (4.12) genau die Brennpunkte der Steiner-Inellipse  $S$  zu dem von den Nullstellen  $z_1, z_2, z_3$  erzeugten Dreieck  $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ . Somit ist der Satz bewiesen. (vgl. [Wer], S. 44)  $\square$

### (5.2) Beispiel (Satz von Marden)

Seien  $z_1 := 1 + 2i$ ,  $z_2 := 5 + i$  und  $z_3 := 3 + 6i$  die Nullstellen eines Polynoms  $p \in \mathbb{C}$ . Dann gilt für  $p$  explizit:

$$p(z) = (z - (1 + 2i))(z - (5 + i))(z - (3 + 6i)) \quad (5.8)$$

$$= z^3 - (9 + 9i)z^2 + (3 + 56i)z + (57 - 51i), \quad (5.9)$$

und ferner für dessen Ableitung  $p'$ :

$$p'(z) = 3z^2 - (18 + 18i)z + (3 + 56i). \quad (5.10)$$

Nun lassen sich die Nullstellen der Ableitung  $p'$  berechnen:

$$z_{1,2} = \frac{(18 + 18i) \pm \sqrt{(18 + 18i)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (3 + 56i)}}{2 \cdot 3} \quad (5.11)$$

$$= \frac{(18 + 18i) \pm \sqrt{-36 - 24i}}{6} \quad (5.12)$$

$$= (3 + 3i) \pm \frac{1}{3}\sqrt{-9 - 6i} \quad (5.13)$$

$$z_1 \approx \underbrace{3.32 + 1.95i}_{=:q_1} \quad (5.14)$$

$$z_2 \approx \underbrace{2.68 + 4.05i}_{=:q_2} \quad (5.15)$$

Mithilfe der folgenden Abbildung 5.1 lassen sich die berechneten Nullstellen der Ableitung  $p'$  als die Brennpunkte der Steiner-Inellipse des von den Nullstellen  $z_1, z_2, z_3$  aufgespannten Dreiecks verifizieren.

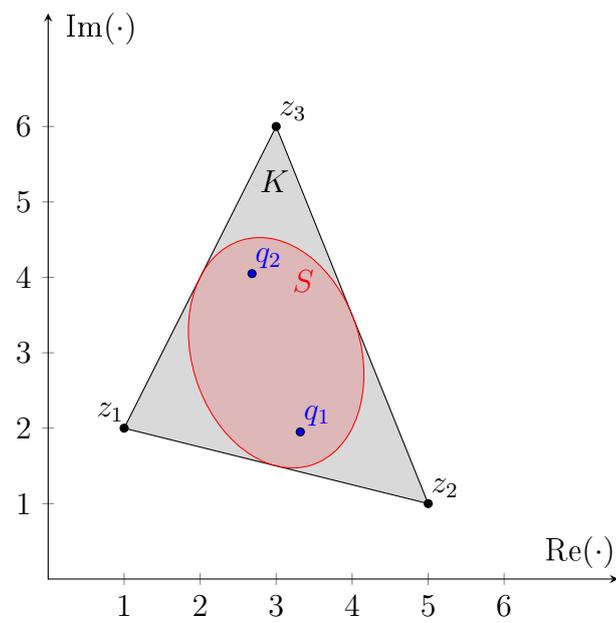


Abbildung 5.1: Nullstellen der Polynome  $p$  und  $p'$

Demnach liegt nun die Beziehung der Nullstellen eines komplexen Polynoms dritten Grades und dessen Ableitung auf der Hand.

## 6 Epilog

Der Satz von Marden offenbart eine erstaunliche Beziehung zwischen der konvexen Geometrie von ebenen Figuren und den Positionen der Nullstellen eines Polynoms und dessen Ableitung. Wird das Resultat wieder auf das Anfangsbeispiel im Prolog bezogen, so ist es bereits erstaunlich, dass die Nullstellen der Ableitung  $p'$  zwischen den Nullstellen des Polynoms  $p$  selbst liegen. Denn zur Erinnerung: Die Nullstellen des Polynoms  $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  sind gegeben durch  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Doch wird dieses Polynom um genügend Einheiten in  $y$ -Richtung verschoben, beispielsweise zu  $\tilde{p}(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 6$ , so verändern sich dementsprechend die Nullstellen des Polynoms  $p$ , aber nicht die Nullstellen der Ableitung  $p'$ . In diesem Fall hat das Polynom  $\tilde{p}$  lediglich eine reelle Nullstelle bei  $\tilde{x}_1 = 0$  und somit scheinen die Nullstellen der Ableitung  $p'$  nicht mehr zwischen den Nullstellen des Polynoms  $\tilde{p}$  zu liegen. Aber bei der Betrachtung aller Nullstellen des Polynoms  $\tilde{p}$ , auch der komplexen Nullstellen, die da wären  $\tilde{x}_2 = 3 - i\sqrt{2}$  und  $\tilde{x}_3 = 3 + i\sqrt{2}$ , wird schnell klar, dass die Nullstellen der Ableitung  $p'$   $x'_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x'_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}$  dennoch innerhalb des von den Nullstellen des Polynoms  $\tilde{p}$  aufgespannten Dreiecks liegen. Um so beeindruckender ist es dann, dass sich die Nullstellen der Ableitung laut dem Satz von Marden exakt in den Brennpunkten der Steiner-Inellipse jenes Dreiecks lokalisieren lassen, was in der nachfolgenden Abbildung 6.1 zu sehen ist. (vgl. [Cha], S. 101f. und [Kal], S. 330f.)

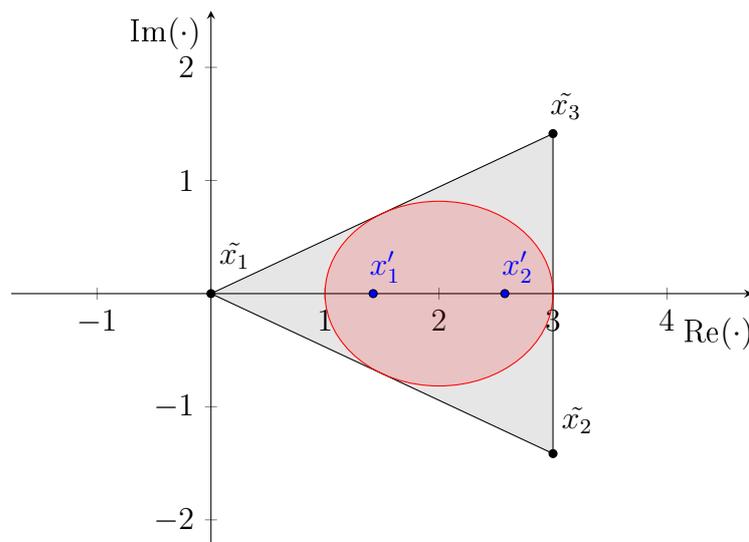


Abbildung 6.1: Position der Nullstellen

Um den Satz von Marden mit einer solchen eleganten Leichtigkeit beweisen zu können, wie es im fünften Kapitel mittels der einfachen Nullstellenbestimmung durch die weitverbreitete Mitternachtsformel gezeigt wurde, bedurfte es entsprechender Inhalte aus den Themengebieten der konvexen Geometrie, der Linearen Algebra und der komplexen Analysis. Die Art des gewählten Beweises ermöglichte es, in die wunderschöne konvexe Geometrie einzuführen, einige Besonderheiten wie die Löwner-John-Ellipsoide und die Steiner-Inellipse zu präsentieren und somit ein breites Spektrum um den Satz von Marden zu beleuchten. Letztendlich verband der Satz von Marden all diese Themengebiete miteinander und wurde dadurch für mich persönlich zu einem der schönsten Sätze im Mathematikstudium.

### **DANKSAGUNGEN**

Zu guter Letzt möchte ich mich an dieser Stelle bei allen Personen bedanken, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. An erster Stelle geht mein Dank an meine freundliche und geduldige Betreuerin Frau Prof. Dr. Maria Beatrice Pozzetti, die mich das Thema dieser Arbeit frei wählen lassen hat, bei sämtlichen Fragen immer zur Verfügung stand und mich stets sehr gut unterstützte. Ich danke auch meiner Familie für die Ermutigungen und die Unterstützung sowie allen meinen Freunden und Kommilitonen für die interessanten und motivierenden Konversationen.

## 7 Literaturverzeichnis

- [**Cha**] M. Chamberland: *Von Eins bis Neun - Große Wunder hinter kleinen Zahlen*, Springer-Verlag, 2016.  
DOI: 10.1007/978-3-662-50251-8
- [**How**] R. Howard: *The John Ellipsoid Theorem*, 1997.  
URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/The-John-Ellipsoid-Theorem-Howard/d27f99ab785c2c431e6b2e286dc4a71291f6c4eb>
- [**Kal**] D. Kalman: *An elementary Proof of Marden's Theorem*, The American Mathematical Monthly (Vol. 115), 2008.  
DOI: 10.1080/00029890.2008.11920532
- [**Mar**] J. T. Marti: *Konvexe Analysis*, 1. Auflage, Springer Basel AG, 1977.  
DOI: 10.1007/978-3-0348-5910-3
- [**Min**] D. Minda und S. Phelps: *Triangles, Ellipses, and Cubic Polynomials*, The American Mathematical Monthly (Vol. 115), 2008.  
DOI: 10.1080/00029890.2008.11920581
- [**Spi**] M. Spielmann: *Affine Abbildungen*, unbekannt.  
URL: <https://www.mspielmann.de/matheseite/lk12/abbildungen.pdf>
- [**Wer**] J. Werner: *Noch mehr merkwürdige Mathematik*, 2018.  
URL: <http://num.math.uni-goettingen.de/werner/schmankerl3.pdf>
- [**Wik**] <https://de.wikipedia.org/wiki/Steiner-Inellipse>, zuletzt aufgerufen am 31.01.2022.

## 8 Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich diese Arbeit im Rahmen der Bachelorprüfung im Wintersemester 2021/22 bei meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Maria Beatrice Pozzetti nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Literatur angefertigt habe. Die den benutzten Werken wörtlich entnommenen Stellen sind als solche nach den Regeln des wissenschaftlichen Arbeitens gekennzeichnet. Mir ist bewusst, dass ich fremde Texte und Textpassagen nicht als meine eigenen ausgeben darf und dass ein Verstoß gegen diese Grundregel des wissenschaftlichen Arbeitens als Täuschungs- und Betrugsversuch gilt, der entsprechende Konsequenzen nach sich zieht. Diese bestehen in der Bewertung der Prüfungsleistung mit *nicht bestanden* sowie gegebenenfalls weiteren Maßnahmen.

Mannheim, den 10. Februar 2022