Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Theoretische Informatik

Bachelor-Arbeit

Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe: Gödelscher Unvollständigkeitssatz und Satz von Löwenheim-Skolem

Name:	Miro Rashid
Matrikelnummer:	4102931
Betreuer:	Jun.-Prof. Dr. Felix Joos
Datum der Abgabe:	18.11.2023

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und wörtlich oder inhaltlich aus fremden Werken Übernommenes als fremd kenntlich gemacht habe. Ferner versichere ich, dass die übermittelte elektronische Version in Inhalt und Wortlaut mit der gedruckten Version meiner Arbeit vollständig übereinstimmt. Ich bin einverstanden, dass diese elektronische Fassung universitätsintern anhand einer Plagiatssoftware auf Plagiate überprüft wird.

Ludwigshafen, den 18.11.2023

. . . .
Miro Rashid

Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Bachelorarbeit ist es, die Prädikatenlogik erster Stufe zu analysieren und dabei den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz sowie den Satz von Löwenheim-Skolem zu präsentieren. Beide dieser Sätze offenbaren gewisse Grenzen, die in der Prädikatenlogik auftreten und diese aber auch charakterisieren.

Zunächst wird die Prädikatenlogik erster Stufe durch formale Sprachen eingeführt und diese modelltheoretisch mit einer Semantik versehen. Anschließend wird die semantische Folgerung innerhalb der Prädikatenlogik durch einen sogenannten Sequenzenkalkül adäquat beschrieben, welcher erlaubt, Beweise rein syntaktisch darzustellen.

Ein zentrales Resultat der Arbeit ist der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz, welcher u.A. mithilfe von Berechenbarkeitstheorie bewiesen wird. Der Satz liefert in hinreichend mächtigen, konsistenten und axiomatisierbaren Theorien die Existenz von Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind. Schließlich wird mithilfe des Satzes von Löwenheim-Skolem und einer Folgerung des Endlichkeitssatzes die Unmöglichkeit untersucht, die Erfüllbarkeit einer Theorie auf Modelle mit beliebiger unendlicher Mächtigkeit einzuschränken.

Abstract

The aim of this bachelor's thesis is to analyse first-order logic and to present Gödel's first incompleteness theorem as well as the Löwenheim-Skolem theorem. Both of these theorems reveal certain limits that occur in first-order logic but also characterize it.

First, first-order logic is introduced by using formal languages and then is provided with semantics in terms of model theory. Thereafter, semantic consequences are described by a so-called sequent calculus in a sound and complete way, such that proofs are represented purely syntactically.

A central result of this thesis is Gödel's first incompleteness theorem, which is proven with the use of computability theory. The theorem provides the existence of sentences that are neither provable nor refutable in sufficiently strong, consistent, and axiomatisable theories. Finally the Löwenheim-Skolem theorem and a corollary of the compactness theorem are used to investigate the impossibility of restricting the satisfiability of a theory to models with arbitrary infinite cardinality.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine Aufgabe der Mathematik ist es, Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten zu studieren. Dabei spielen mathematische Aussagen und Beweise eine grundlegende Rolle. In der mathematischen Logik versucht man, diese zu formalisieren, um sie aus einer äußeren Perspektive, die wir *Metaebene der Arbeit* nennen, zu analysieren.

Nützlich ist dabei die *Prädikatenlogik erster Stufe* als logisches System, das sich mit der Formalisierung einer bestimmten Klasse von mathematischen Aussagen in Form von formalen Sprachen beschäftigt. Charakteristisch für diese Aussagen sind zunächst Quantoren, die erlauben, über Variablen zu quantisieren, sowie Relationen (auch Prädikate genannt), die abhängig von den Variablen einen Wahrheitswert liefern. Etwa

$$\forall x\ (x < x + 1)$$

wäre eine Aussage der Prädikatenlogik erster Stufe, konkreter der *arithmetischen Sprache*, wobei $<$ eine Relation ist. Die Aussage entspricht der mathematischen Aussage in Worten: „Für jedes x ist x kleiner als $x + 1$." Weiterhin kann das Beweisen von solchen Aussagen vollständig durch einen *Sequenzenkalkül* beschrieben werden. Dieser Kalkül ist sogar rekursiv aufzählbar und kann damit auf algorithmische Weise Beweise erzeugen.

Die Prädikatenlogik erster Stufe ist somit ein mächtiges Hilfswerk, in dem auch beispielsweise die Zermelo-Fränkel-Mengenlehre formuliert werden kann. Damit entspricht sie zu einem gewissen Grade der uns geläufigen Mathematik.

Durch diese Formalisierung werden jedoch erst auch Grenzen sichtbar, an die diese Mathematik kommt. Nämlich können wir mittels Berechenbarkeitstheorie die Unentscheidbarkeit bestimmter Theorien und insbesondere des Beweiskalküls zeigen. Daraus folgern wir den *ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz*, der uns zeigt, dass es unter gewissen Bedingungen Aussagen gibt, die man weder beweisen noch widerlegen kann. Konkreter sagt der Satz aus, dass konsistente, axiomatisierbare Theorien, die hinreichend mächtig sind, nicht vollständig sein können.

Weiter ist es zwar möglich, dass man Theorien so konstruiert, dass diese nur durch Modelle mit beliebiger endlicher Mächtigkeit erfüllt werden. Jedoch zeigt der *Satz von Löwenheim-Skolem* die Grenze auf, dass dies in der Prädikatenlogik erster Stufe mit unendlichen Mächtigkeiten nicht möglich ist. Konkret liefert uns der Satz, dass jede Theorie mit unendlichem Modell auch ein abzählbares Modell besitzt, allgemeiner sogar auch Modelle mit anderer beliebiger unendlicher Mächtigkeit.

Nachdem wir in Abschnitt 2 einige theoretische Grundlagen festlegen, führen wir in Abschnitt 3 die Prädikatenlogik erster Stufe syntaktisch und semantisch ein. Anschließend formalisieren und studieren wir das Beweisen mithilfe des Sequenzenkalküls in Abschnitt 4. Dann ist es uns möglich, die Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit der Prädikatenlogik in Abschnitt 5 zu beweisen. Schließlich zeigen wir in Abschnitt 6 den Satz von Löwenheim-Skolem.

2 Grundlagen

Wir halten in diesem Abschnitt einige Grundbegriffe und Notationen fest, die wir in der Arbeit benutzen. Zunächst spielen Relationen, auch als Prädikate bekannt, in der Prädikatenlogik, wie der Name suggeriert, eine wichtige Rolle.

Definition 2.1 (Relation)**.** Eine n-stellige **Relation** auf einer Menge A für ein $n \in \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge $R \subseteq A^n$. Wir schreiben

$$R(a_1, \ldots, a_n) \text{ genau dann, wenn } (a_1, \ldots, a_n) \in R.$$

Da wir für die Formalisierung der Prädikatenlogik auf formale Sprachen zurückgreifen, benötigen wir folgende Begrifflichkeiten, basierend auf Definitionen aus [Sch22, Abschnitt 1].

Definition 2.2 (Alphabet, Wort, Sprache)**.** Ein **Alphabet** Σ ist eine nichtleere Menge. Dessen Elemente nennen wir **Symbole**.

Ein **Wort** über einem Alphabet Σ ist eine endliche Folge von Symbolen aus Σ. Die **Länge** eines Wortes w bezeichnen wir mit $|w|$. Das **leere Wort** ε ist das eindeutige Wort mit $|\varepsilon| = 0$.

Eine **Sprache** L über einem Alphabet Σ ist eine Menge von Wörtern über Σ. Mit Σ^* bezeichnen wir die Sprache aller Wörter über Σ.

Definition 2.3 (Konkatenation)**.** Die **Konkatenation** zweier Wörter u, v notieren wir mit uv und ist das Wort, welches man durch Aneinanderreihung der Symbole von u und v in ihrer Reihenfolge erhält. Die **Konkatenation** zweier Sprachen L_1, L_2 ist die Sprache $L_1L_2 := \{w_1w_2 : w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$.

Für ein Wort w und $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$\begin{aligned} w^0 &:= \varepsilon \\ w^n &:= w^{n-1}w = \underbrace{w \ldots w}_{n\text{-mal}} . \end{aligned}$$

Definition 2.4 (Homomorphismus von Sprachen)**.** Ein **Homomorphismus von Sprachen** zwischen zwei Sprachen L_1 und L_2 ist eine Abbildung $\varphi : L_1 \to L_2$, sodass für alle Wörter $u, v \in L_1$

$$\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$$

gilt.

Weiterhin betreiben wir für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz Berechenbarkeitstheorie. Hierfür benutzen wir Begriffe und Grundlagen des Turingmaschinenmodells, wie die in [Sch22]. Dazu gehören (nichtdeterministische) Turingmaschinen, berechenbare Funktionen, sowie rekursiv aufzählbare und entscheidbare Mengen. Außerdem nehmen wir implizit von elementaren algorithmischen Verfahren an, auf Turingmaschinen umsetzbar zu sein.

Folgendes Resultat zur Entscheidbarkeit von Mengen werden wir auch benötigen.

Proposition 2.5 (Komplementationsprinzip, [Sch22, 4.5])**.** *Sei L eine Sprache über einem Alphabet Σ. Dann ist L genau dann entscheidbar, wenn L und $L^c := \Sigma^* \setminus L$ rekursiv aufzählbar sind.*

Im späteren Verlauf behandeln wir zum Satz von Löwenheim-Skolem Mächtigkeiten von Mengen und wollen hiermit den umgangssprachlichen Begriff der „Größe" einer Menge als Vergleich darstellen.

Definition 2.6 (Vergleich von Mächtigkeiten)**.** Seien M, N Mengen. Wir schreiben

- $|M| \leq |N|$, wenn es eine Injektion $M \to N$ gibt.
- $|M| = |N|$, wenn es eine Bijektion $M \to N$ gibt.

Dies ermöglicht uns die Unterteilung von Mengen in Mächtigkeitsklassen, also Klassen von Mengen der gleichen Mächtigkeit. Dabei sind folgende Bezeichnungen für Mächtigkeitsklassen von besonderer Bedeutung:

Definition 2.7 (höchstens abzählbar, abzählbar, überabzählbar)**.** Eine Menge M heißt

- **höchstens abzählbar**, wenn $|M| \leq |\mathbb{N}|$,
- **abzählbar**, wenn $|M| = |\mathbb{N}|$ und
- **überabzählbar**, wenn M nicht höchstens abzählbar ist.

Angewendet auf höchstens abzählbare Alphabete erhalten wir die Abzählbarkeit der Sprachen über diesen:

Proposition 2.8 ([EFT18, 2.1.2])**.** *Sei Σ ein höchstens abzählbares Alphabet. Dann ist Σ^* abzählbar.*

Häufig wird in der Literatur für Mächtigkeitsklassen auch der Begriff der Kardinalität genutzt. Für Mächtigkeits- bzw. Kardinalitätsargumente, bedienen wir uns mit den Resultaten aus [Rot95, Abschnitt 7.6].

3 Prädikatenlogik erster Stufe

In diesem Abschnitt führen wir die sogenannte Prädikatenlogik erster Stufe ein. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind Relationen (auch Prädikate) und Quantoren charakteristisch für die Aussagen der Prädikatenlogik erster Stufe. Dabei ist das Ziel, mathematischen Aussagen zu formalisieren, um diese auf der Metaebene der Arbeit beschreiben und weitere Aussagen über diese treffen zu können.

Dafür legen wir zunächst eine Syntax fest, nach deren Regeln wir Wörter bauen können, die dann mathematischen Aussagen entsprechen sollen. Anschließend unterlegen wir diesen syntaktisch korrekten Wörtern eine Semantik, sodass wir ihnen, wie in der Mathematik auch, Wahrheitswerte zuordnen können. Danach fokussieren wir uns enger auf die sogenannte arithmetische Sprache, die eine zentrale Rolle im Abschnitt 5 zum ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz spielt.

3.1 Syntax

In diesem Unterabschnitt nehmen wir uns zur Formalisierung von mathematischen Aussagen formale Sprachen und ihre Wörter zur Hand. Wir orientieren uns dabei an den Definitionen von [EFT18, Abschnitt 2] und [LK15, Abschnitt 1.3].

Dazu legen wir zunächst eine Menge von Symbolen fest, die die Grundbausteine für Formeln und Aussagen bilden sollen. Diese bilden ein Alphabet, welches wir Signatur nennen.

Definition 3.1 (Signatur einer Sprache erster Stufe)**.** Eine **Signatur einer Sprache erster Stufe**, kurz **Signatur erster Stufe**, ist ein Alphabet

$$\Sigma = \{\neg, \wedge, \forall, \equiv\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F},$$

wobei

- $\neg, \wedge, \forall, \equiv$ die **logischen Symbole** für die Negation, die Konjunktion, den Allquantor und die Gleichheit sind.
- $\mathcal{V} := \{v_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der **Variablensymbole** v_i ist. Oft sagen wir zu diesen Symbolen auch kurz **Variablen**.
- $\mathcal{R} := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_k$ eine Menge von **Relationssymbolen** ist, wobei für alle $k \in \mathbb{N}$ jedes Relationssymbol aus $\mathcal{R}_k$ die feste **Stelligkeit** k hat.
- $\mathcal{F} := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_k$ eine Menge von **Funktionssymbolen** ist, wobei für alle $k \in \mathbb{N}_0$ jedes Funktionssymbol aus $\mathcal{F}_k$ die feste **Stelligkeit** k hat. Ein Funktionssymbol mit Stelligkeit 0 nennen wir auch **Konstantensymbol**.

Dabei seien $\{\neg, \wedge, \forall, \equiv\}, \mathcal{V}, \mathcal{R}_k, \mathcal{F}_k$ paarweise disjunkt.

Bemerkung 3.2. Die Signatur erster Stufe ist durch die Wahl der Relations- und Funktionssymbole und deren Stelligkeit eindeutig bestimmt.

Für das Gleichheitssymbol $\equiv$ benutzen wir drei Querlinien, um diese von der Gleichheit $(=)$ auf der Metaebene der Arbeit zu unterscheiden. Dies erlaubt uns, beispielsweise $w = \equiv v_0v_1$ unmissverständlich als die Aussage „w ist das Wort $\equiv v_0v_1$" der Metaebene zu verstehen.

Jede Signatur enthält allein schon wegen der Variablensymbole mindestens abzählbar viele Symbole. Die Signatur kann jedoch auch überabzählbar sein, da man beliebig viele Relations- und Funktionssymbole erlauben kann. Die folgende Signatur enthält aber beispielsweise nur abzählbar viele Relations- und Funktionssymbole für jede Stelligkeit.

Definition 3.3 (Abzählbare Signatur)**.** Sei Σ_∞ die Signatur erster Stufe mit

- $\mathcal{R}_k := \{R_i^k : i \in \mathbb{N}_0\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und
- $\mathcal{F}_k := \{f_i^k : i \in \mathbb{N}_0\}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Aus den Symbolen einer Signatur können wir Wörter bilden. Hierfür definieren wir uns induktiv eine Syntax, um festzulegen, wie sogenannte Formeln und Aussagen auszusehen haben.

Sei dazu Σ eine beliebige Signatur erster Stufe.

Definition 3.4 (atomarer Term)**.** Ein **atomarer Term** ist ein Wort $t \in \Sigma^*$, welches eine der beiden Bedingungen erfüllt:

(i) $t \in \mathcal{V}$ ist ein Variablensymbol.

(ii) $t \in \mathcal{F}_0$ ist ein Konstantensymbol.

Definition 3.5 (Term)**.** Ein **Term** ist ein Wort $t \in \Sigma^*$, welches eine der beiden Bedingungen erfüllt:

(i) t ist ein atomarer Term.

(ii) $t = ft_1t_2 \dots t_k$, wobei $f \in \mathcal{F}_k$ ein Funktionssymbol mit Stelligkeit k, für ein $k \in \mathbb{N}$, ist und $t_1, \dots, t_k$ wiederum Terme sind.

Definition 3.6 (atomare Formel)**.** Eine **atomare Formel** ist ein Wort $F \in \Sigma^*$, welches eine der beiden Bedingungen erfüllt:

(i) $F = \equiv t_1t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind.

(ii) $F = Rt_1 \dots t_k$, wobei $R \in \mathcal{R}_k$ ein Relationssymbol mit Stelligkeit k, für ein $k \in \mathbb{N}$, ist und $t_1, \dots, t_k$ Terme sind.

Definition 3.7 (Formel)**.** Eine **Formel** ist ein Wort $F \in \Sigma^*$, welches eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) F ist eine atomare Formel.

(ii) $F = \neg G$.

(iii) $F = \wedge GH$.

(iv) $F = \forall x G$.

Dabei seien G und H wiederum Formeln und $x \in \mathcal{V}$ eine Variable.

Beispiel 3.8. Sei $R \in \mathcal{R}_2$ ein zweistelliges Relationssymbol, $f \in \mathcal{F}_1$ ein einstelliges Funktionssymbol und $c \in \mathcal{F}_0$ ein Konstantensymbol.

Dann sind v_0, v_1 und c atomare Terme. Daraus folgt, dass fv_0 ein Term ist.

Wir können nun aus diesen die atomaren Formeln

$$\begin{gathered} \equiv v_0 v_1 \\ R\ fv_0\ c \end{gathered}$$

erzeugen. Daraus erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Definition 3.7 die Formeln

$$\begin{aligned} \wedge \equiv v_0 v_1\ Rfv_0 c \\ \neg \wedge \equiv v_0 v_1\ Rfv_0 c \\ \forall v_0\ \neg \wedge \equiv v_0 v_1\ Rfv_0 c \end{aligned}$$

und schließlich erhalten wir auch folgende Formel:

$$\neg \forall v_0 \neg \wedge \equiv v_0 v_1 Rfv_0 c \tag{1}$$

Bemerkung 3.9 (Lesbare Notation)*.* Aus Lesbarkeits- und Gewohnheitsgründen notieren wir Formeln im Weiteren etwas abweichend von ihrer Definition. Jedoch ist es wichtig im Hinterkopf zu behalten, dass die Sprache der syntaktisch korrekten Formeln weiterhin wie oben definiert bleibt.

(i) Wir benutzen abweichende Variablensymbole, wie x oder y, die aus dem Kontext heraus ersichtlich sind.

(ii) Da die Relations- und Funktionssymbole per Definition ausschließlich in Präfixnotation vorkommen, ist es nicht nötig, Klammern zu setzen, da die Ausführungsreihenfolge klar ist. Dennoch schreiben wir vereinfacht Klammern dazu und trennen die Variablen durch Kommata. Beispielsweise schreiben wir $R(x, y)$ statt Rxy für ein zweistelliges Relationssymbol R.

(iii) Das Konjunktions- und Gleichheitssymbol kommen ebenfalls ausschließlich in Präfixnotation vor, damit eben in der oben definierten Syntak Klammern vermieden werden. Dennoch schreiben wir diese vereinfacht in ihrer üblicheren Infixnotation und setzen, falls nötig, Klammern. Beispielsweise schreiben wir $x \equiv y$ statt $\equiv xy$ und $F \wedge G$ statt $\wedge FG$, für Formeln F und G.

(iv) In der Signatur haben wir die logischen Symbole für die Disjunktion, Implikation, das Bikonditional und den Existenzquantor ausgelassen, um die Signatur minimal zu halten. Diese können leicht aus Kombinationen der verfügbaren Symbole gebildet werden, so schreiben wir für Formeln F und G vereinfacht auch:

$$\begin{aligned} F \vee G &\text{ statt } \neg(\neg F \wedge \neg G)\,, \\ F \rightarrow G &\text{ statt } \neg(F \wedge \neg G)\,, \\ F \leftrightarrow G &\text{ statt } (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \text{ und} \\ \exists x F &\text{ statt } \neg\forall x \neg F\,. \end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir die Pfeile $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ mit nur einer Querlinie um diese von der Implikation ($\Rightarrow$) und Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) auf der Metaebene der Arbeit zu unterscheiden.

Beispiel 3.10. Wir schauen uns die obige Beispielformel (1)

$$\neg\forall v_0 \neg \wedge \equiv v_0 v_1 R f v_0 c$$

an. Benutzen wir Variablensymbole, wie x und y, und setzen Klammern und Kommata, wie in Bemerkung 3.9 (i) und (ii), erhalten wir

$$\neg\forall x \neg \wedge \equiv xyR(f(x), c)\,.$$

Schreiben wir Konjunktion und Gleichheit in ihre üblichere Infixnotation um, wie in Bemerkung 3.9 (iii), erhalten wir

$$\neg\forall x \neg(x \equiv y \wedge R(f(x), c))\,.$$

Nutzen wir schließlich die abkürzende Schreibweise, wie in Bemerkung 3.9 (iv), erhalten wir

$$\exists x(x \equiv y \wedge R(f(x), c))\,. \tag{2}$$

In Worten kann man die Formel also als folgende auffassen:

Es gibt ein x, sodass x und y gleich sind
und $f(x)$ mit c in Relation R steht.

Es fällt uns auf, dass Formeln a priori keine Aussagen bilden, denn diese können Variablen besitzen, von denen sie „abhängen". Der obigen Beispielformel (2) kann kein Wahrheitswert zugeordnet werden; was das konkret bedeutet, sehen wir im nächsten Unterabschnitt. Denn es ist nicht klar, wie die Variable y zu verstehen ist.

Definition 3.11 (gebundene und freie Variablen)**.** Sei F eine Formel. Eine Variable x, die im Wort F von links nach rechts zuerst direkt auf ein Allquantorsymbol folgt, nennen wir **gebunden** in F. Eine Variable x, die im Wort F enthalten ist, aber nicht gebunden ist, nennen wir **frei** in F.

Bemerkung 3.12. Ist F eine Formel mit genau k freien Variablen $x_1, \dots, x_k$, schreiben wir zur besseren Übersicht statt nur F auch $F(x_1, \dots, x_k)$. Weiterhin erlauben wir freie Variablen durch Terme zu ersetzen. Dabei wird jedes Vorkommen eines Variablensymbols durch den jeweiligen Term ersetzt, bis von links nach rechts das erste Mal die Variable direkt nach einem Allquantorsymbol steht. Hierzu schreiben wir dann $F(t_1, \dots, t_k)$ für Terme $t_1, \dots, t_k$.

Definition 3.13 (Aussage)**.** Eine Formel ohne freie Variablen nennen wir **Aussage**.

Beispiel 3.14. In der obigen Beispielformel (2) ist x eine gebundene und y eine freie Variable. Diese Formel definieren wir als $F(y)$. Sei $d \in \mathcal{F}_0$ ein Konstantensymbol. Dann können wir y in F durch d ersetzen

$$F(d) = \exists x(x \equiv d \wedge R(f(x), c)) \,.$$

Dadurch ist $F(d)$ eine Aussage, da in dieser keine freien Variablen vorkommen. Sei hingegen beispielsweise

$$G(y) := \forall x(x \equiv y \vee \exists y R(y, y))$$

eine weitere Formel mit der freien Variable y. Ersetzen wir hier diese Variable durch den Term $f(d)$, so erhalten wir die Aussage

$$G(f(d)) = \forall x(x \equiv f(d) \vee \exists y R(y, y)) \,.$$

Hierbei beachten wir, dass die Variable nur an der ersten Stelle ersetzt wurde. Die nächsten 3 Vorkommnisse von y bleiben unberührt, denn der Existenzquantor bindet y zum ersten Mal, somit ist y nachfolgend nicht mehr frei.

Definition 3.15 (Sprache erster Stufe)**.** Sei Σ eine Signatur erster Stufe. Die **Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe** über Σ, kurz **Sprache erster Stufe**, ist die Sprache aller syntaktisch korrekten Formeln über Σ. Wir schreiben $\mathcal{L}_\Sigma \subseteq \Sigma^*$ für diese Sprache. Weiterhin schreiben wir $\mathcal{A}_\Sigma \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$ für die Sprache aller syntaktisch korrekten Aussagen über Σ.

Wenn wir allgemein von Formeln und Aussagen reden, beziehen wir uns auf diejenigen aus der Sprache erster Stufe, die aus dem jeweiligen Kontext hervorgeht. Legen wir zu Beginn eines Abschnitts eine Signatur fest, so sind Formeln und Aussagen aus der Sprache erster Stufe über diese Signatur gemeint.

3.2 Semantik

Die im vorigen Unterabschnitt definierten Formeln und Aussagen sind a priori Aneinanderreihungen von Symbolen ohne weitere Bedeutung. Jetzt beschäftigen wir uns damit, diese mit einer Semantik auszustatten, um sie u.A. mit der Mathematik, die wir kennen, in Verbindung bringen zu können. Dieser Unterabschnitt basiert auf Definitionen und Ergebnisse aus [LK15, Abschnitte 1.6 und 1.7].

Sei Σ eine beliebige zugrundeliegende Signatur erster Stufe.

Definition 3.16 (Interpretation)**.** Eine **Interpretation** $\mathcal{I}$ der Sprache $\mathcal{L}_\Sigma$ besteht aus

- einem **Universum** $\mathcal{U}_\mathcal{I}$, welches eine nichtleere Menge der Werte ist, die die Variablen annehmen können und
- einer **Denotation** für jedes Funktions- und Relationssymbol:
  - Für ein Konstantensymbol $c \in \mathcal{F}_0$ ist die Denotation $c^\mathcal{I} \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ ein Element aus dem Universum.
  - Für ein Funktionssymbol $f \in \mathcal{F}_k$ mit Stelligkeit $k \in \mathbb{N}$ ist die Denotation $f^\mathcal{I} : {\mathcal{U}_\mathcal{I}}^k \to \mathcal{U}_\mathcal{I}$ eine k-stellige Funktion.
  - Für ein Relationssymbol $R \in \mathcal{R}_k$ mit Stelligkeit $k \in \mathbb{N}$ ist die Denotation $R^\mathcal{I} \subseteq {\mathcal{U}_\mathcal{I}}^k$ eine k-stellige Relation auf $\mathcal{U}_\mathcal{I}$.

Bemerkung 3.17. Das Gleichheitssymbol behandeln wir wie ein Relationssymbol mit Stelligkeit 2. Deren Denotation in jeder Interpretation $\mathcal{I}$ legen wir auf die Identitätsrelation auf dem Universum $\mathcal{U}_\mathcal{I}$ fest, also

$$\equiv^\mathcal{I} := \{(x, y) \in {\mathcal{U}_\mathcal{I}}^2 : x = y\}.$$

Mit Interpretation wollen wir Aussagen einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen. Das Vorgehen hierzu ist intuitiv: Man identifiziert die Funktions- und Relationssymbole mit ihren Denotationen, evaluiert die Funktionen, dann die Relationen (inklusive Gleichheiten) und interpretiert anschließend die logischen Symbole wie in der klassischen logischen Notation und quantifiziert beim Allquantor über das gesamte Universum.

Zunächst ordnen wir aber auch Formeln einen Wahrheitswert zu. Dabei müssen wir jedoch allen Variablen einen Wert zuordnen, damit auch Formeln mit freien Variablen interpretiert werden können. Dies erfolgt durch eine Variablenbelegung, die jeder Variable ein eindeutiges Element des Universums zuordnet:

Definition 3.18 (Variablenbelegung)**.** Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation. Eine **Variablenbelegung** in $\mathcal{I}$ ist eine Funktion $s : \mathcal{V} \to \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$.

Da wir häufig in einer bereits bestehenden Variablenbelegung eine Variable durch ein anderes Element ersetzen, führen wir auch folgende Notation ein:

Definition 3.19 (Modifizierung einer Variablenbelegung)**.** Sei s eine Variablenbelegung, $x \in \mathcal{V}$ eine Variable und $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ ein Element. Dann schreiben wir $s_{x \mapsto u}$ für die Variablenbelegung mit

$$s_{x \mapsto u}(v) := \begin{cases} u, & \text{wenn v=x} \\ s(v), & \text{sonst} \end{cases},$$

die also die Variablen wie s belegt, jedoch x mit u belegt.

Mit einer Variablenbelegung können wir Termen nun Werte aus dem Universum einer Interpretation zuordnen. Terme haben wir induktiv definiert, weshalb es sich hier lohnt, eine solche Zuordnung auch induktiv einzuführen.

Definition 3.20 (Termzuordnung)**.** Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und s eine Variablenbelegung in $\mathcal{I}$. Einem Term t ordnen wir induktiv einen eindeutigen Wert $t^{\mathcal{I},s}$ auf folgenderweise zu:

(i) Gilt $t \in \mathcal{V}$, so sei $t^{\mathcal{I},s} := s(t)$.

(ii) Gilt $t \in \mathcal{F}_0$, so sei $t^{\mathcal{I},s} := t^{\mathcal{I}}$.

(iii) Gilt $t = f(t_1, \dots, t_k)$, so sei $t^{\mathcal{I},s} := f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},s}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s})$.

Dabei sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}_k$ ein Funktionssymbol und $t_1, \dots, t_k$ Terme.

Ebenfalls haben wir Formeln induktiv definiert, weshalb wir nun die Wahrheitswertzuordnung auch induktiv einführen.

Definition 3.21 (Wahrheitswert)**.** Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und s eine Variablenbelegung in $\mathcal{I}$. Einer Formel F ordnen wir induktiv wie folgt einen eindeutigen **Wahrheitswert** in $\mathcal{I}$ mit Belegung s zu. Dabei ist der Wahrheitswert entweder `wahr` oder `falsch`. Bei einem Wahrheitswert von `wahr` schreiben wir $\mathcal{I} \vDash F[s]$ und sagen kurz, dass F in $\mathcal{I}$ mit Belegung s **wahr** ist. Analog schreiben wir bei `falsch` $\mathcal{I} \nvDash F[s]$ und sagen kurz, dass F in $\mathcal{I}$ mit Belegung s **falsch** ist.

(i) Gilt $F = t_1 \equiv t_2$, so sei $\mathcal{I} \vDash F[s]$ genau dann, wenn $t_1^{\mathcal{I},s} = t_2^{\mathcal{I},s}$.

(ii) Gilt $F = R(t_1 \dots t_k)$, so sei $\mathcal{I} \vDash F[s]$ genau dann, wenn $R^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},s}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s})$.

(iii) Gilt $F = \neg G$, so sei $\mathcal{I} \vDash F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \nvDash G[s]$.

(iv) Gilt $F = G \wedge H$, so sei $\mathcal{I} \vDash F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash G[s]$ und $\mathcal{I} \vDash H[s]$.

(v) Gilt $F = \forall x G$, so sei $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models G[s_{x\mapsto u}]$ für alle $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ gilt.

Dabei sei $k \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{R}_k$ ein Relationssymbol, $t_1, \dots, t_k$ Terme, G, H Formeln und $x \in \mathcal{V}$ eine Variable.

Wir schauen uns genauer den Wahrheitswertbegriff für Aussagen an. Da Aussagen nämlich keine freien Variablen enthalten, ist die Zuordnung eines Wahrheitswertes unabhängig von der Variablenbelegung.

Allgemeiner sehen wir zunächst ein, dass die Variablenbelegung nur auf den freien Variablen einer Formel relevant ist für den Wahrheitswert dieser Formel.

Lemma 3.22. *Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und t ein Term. Seien s_1 und s_2 Variablenbelegungen in $\mathcal{I}$, sodass $s_1(v) = s_2(v)$ für alle Variablen v von t. Dann gilt $t^{\mathcal{I},s_1} = t^{\mathcal{I},s_2}$.*

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch Induktion über den Aufbau des Terms t. Sei dafür t ein Term, $k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{F}_k$ ein Funktionssymbol. Weiterhin seien für die Induktionshypothese $t_1, \dots, t_k$ Terme, sodass für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ und für jede Variablenbelegungen s_1 und s_2, die auf den Variablen von t_i gleich sind, $t_i^{\mathcal{I},s_1} = t_i^{\mathcal{I},s_2}$ gilt.

Seien nun s_1 und s_2 Variablenbelegungen, die auf den Variablen von t gleich sind.

(i) Gilt $t \in \mathcal{V}$, so gilt nach Voraussetzung $t^{\mathcal{I},s_1} = s_1(t) = s_2(t) = t^{\mathcal{I},s_2}$.

(ii) Gilt $t \in \mathcal{F}_0$, so gilt $t^{\mathcal{I},s_1} = t^{\mathcal{I}} = t^{\mathcal{I},s_2}$.

(iii) Gilt $t = f(t_1, \dots, t_k)$, so gilt nach Induktionshypothese $t^{\mathcal{I},s_1} = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},s_1}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s_1}) = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},s_2}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s_2}) = t^{\mathcal{I},s_2}$.

Da alle Terme nach diesen Regeln induktiv aufgebaut sind, gilt die Aussage des Lemmas für jeden beliebigen Term t. □

Proposition 3.23. *Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und F eine Formel. Seien s_1 und s_2 Variablenbelegungen in $\mathcal{I}$, sodass $s_1(v) = s_2(v)$ für alle freien Variablen v in F. Dann gilt $\mathcal{I} \models F[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models F[s_2]$.*

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch Induktion über den Aufbau der Formel F. Sei dafür F eine Formel, $k \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{R}_k$ ein Relationssymbol, $t_1, \dots, t_k$ Terme und x eine Variable. Weiterhin seien für die Induktionshypothese G und H Formeln, sodass für jede Variablenbelegungen s_1 und s_2, die auf den freien Variablen von G gleich sind, $\mathcal{I} \models G[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models G[s_2]$ gilt und analog für H.

Seien nun s_1 und s_2 Variablenbelegungen, die auf den freien Variablen in t gleich sind.

(i) Gilt $F = t_1 \equiv t_2$, so sind die freien Variablen in F genau alle Variablen in F. Somit ist nach Voraussetzung und unter Anwendung von Lemma 3.22 $t_1^{\mathcal{I},s_1} = t_1^{\mathcal{I},s_2}$ und $t_2^{\mathcal{I},s_1} = t_2^{\mathcal{I},s_2}$. Damit erhalten wir, dass $t_1^{\mathcal{I},s_1} = t_2^{\mathcal{I},s_1}$ genau dann gilt, wenn $t_1^{\mathcal{I},s_2} = t_2^{\mathcal{I},s_2}$. Also gilt $\mathcal{I} \models F[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models F[s_2]$.

(ii) Gilt $F = R(t_1 \dots t_k)$, so sind ebenfalls alle Variablen in F frei. Also erhalten wir wieder unter Anwendung von Lemma 3.22 $t_i^{\mathcal{I},s_1} = t_i^{\mathcal{I},s_2}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Analog gilt $R^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},s_1}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s_1})$ genau dann, wenn $R^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},s_2}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s_2})$. Also gilt auch hier $\mathcal{I} \vDash F[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash F[s_2]$.

(iii) Gilt $F = \neg G$, so sind die freien Variablen in F genau die freien Variablen in G. Also sind insbesondere s_1 und s_2 auf den freien Variablen von G gleich. Damit gilt nach Induktionshypothese $\mathcal{I} \vDash G[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash G[s_2]$. Da $\mathcal{I} \vDash F[s_1]$ nach Definition des Wahrheitswerts genau dann gilt, wenn $\mathcal{I} \nvDash G[s_1]$ und analog $\mathcal{I} \vDash F[s_2]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \nvDash G[s_2]$, erhalten wir insgesamt auch, dass $\mathcal{I} \vDash F[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash F[s_2]$.

(iv) Gilt $F = G \wedge H$, so sind die freien Variablen von G und H auch freie Variablen von F. Also sind insbesondere s_1 und s_2 auf den freien Variablen von G und auf den freien Variablen von H gleich. Damit gilt nach Induktionshypothese $\mathcal{I} \vDash G[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash G[s_2]$ und $\mathcal{I} \vDash H[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash H[s_2]$. Nach Definition des Wahrheitswerts erhalten wir analog zu (iii), dass $\mathcal{I} \vDash F[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash F[s_2]$.

(v) Gilt $F = \forall x G$, so sind die freien Variablen von G, bis auf eventuell x, auch freie Variablen von F. Sei $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$ beliebig. Dann sind $(s_1)_{x \mapsto u}$ und $(s_2)_{x \mapsto u}$ auf den freien Variablen von G gleich. Damit gilt nach Induktionshypothese $\mathcal{I} \vDash G[(s_1)_{x \mapsto u}]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash G[(s_2)_{x \mapsto u}]$. Da u beliebig aus dem Universum gewählt wurde, erhalten wir nach Definition des Wahrheitswerts, dass $\mathcal{I} \vDash F[s_1]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash F[s_2]$.

Da alle Formeln nach diesen Regeln induktiv aufgebaut sind, gilt die Aussage des Lemmas für jede beliebige Formel F. □

Die beiden vorhergehenden Beweisen folgen dem Beweisprizip der Induktion über den Aufbau eines Terms bzw. einer Formel. Terme und Formeln wurden induktiv definiert, weshalb sich eine Eigenschaft über alle Terme/Formeln beweisen lässt, indem zunächst die Eigenschaft für den Basisfall, also für atomare Terme/Formeln, gezeigt wird. Dann benutzt man im Induktionsschritt Terme/Formeln, von denen man annimmt, dass für diese die Eigenschaft bereits gilt, für den Aufbau weiterer Terme/Formeln gemäß Definitionen 3.5 bzw. 3.7, um zu zeigen, dass diese auch die zu zeigende Eigenschaft erfüllen.

Korollar 3.24. *Der Wahrheitswert einer Aussage hängt nicht von der Variablenbelegung ab.*

Beweis. Sei A eine Aussage und $\mathcal{I}$ eine Interpretation. Für je zwei beliebige Variablenbelegungen in $\mathcal{I}$ s_1 und s_2 gilt, dass diese auf den freien Variablen von A gleich sind, da A nämlich keine freien Variablen besitzt. Aus Proposition 3.23 folgt, dass $\mathcal{I} \vDash A[s_1]$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{I} \vDash A[s_2]$. Also ist der Wahrheitswert von A bei jeder Variablenbelegung gleich. □

Dies erlaubt es uns bei Wahrheitswerten von Aussagen die Variablenbelegung auszulassen.

Definition 3.25 (Wahrheitswert)**.** Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation. Der **Wahrheitswert** in $\mathcal{I}$ einer Aussage A ist der eindeutige Wahrheitswert, den man in $\mathcal{I}$ mit jeder Variablenbelegung erhält. Bei einem Wahrheitswert von `wahr` schreiben wir $\mathcal{I} \vDash A$ und sagen kurz, dass A in $\mathcal{I}$ **wahr** ist. Analog schreiben wir bei `falsch` $\mathcal{I} \nvDash A$ und sagen kurz, dass A in $\mathcal{I}$ **falsch** ist.

Definition 3.26 (Modell)**.** Eine Interpretation $\mathcal{I}$ heißt **Modell** einer Aussage A, wenn $\mathcal{I} \vDash A$.

Sei Γ eine Menge von Aussagen. Eine Interpretation $\mathcal{I}$ heißt **Modell** von Γ, kurz $\mathcal{I} \vDash \Gamma$, wenn $\mathcal{I}$ Modell jeder Aussage aus Γ ist.

Wir werden uns im weiteren Verlauf der Arbeit hauptsächlich auf Aussagen fokussieren. Daher reichen uns die Definitionen in dieser Form. Tatsächlich ist es aber auch möglich, zu ähnlichen Resultaten zu kommen, wenn man einen allgemeineren Ansatz mit Formeln verfolgt. Beispielsweise ist in [LK15] eine Interpretation genau dann Modell einer Formel, wenn die Formel in dieser mit jeder Variablenbelegung wahr ist. Alternativ besitzt in mancher Literatur (etwa [EFT18]) jede Interpretation definitionsgemäß eine Variablenbelegung.

3.3 Arithmetische Sprache

Die Prädikatenlogik haben wir bisher allgemein gehalten, doch wollen wir uns in diesem Unterabschnitt die sogenannte arithmetische Sprache anschauen, da diese eine greifbare und vertraute Sprache erster Stufe ist. Mit dieser sehen wir insbesondere auch einige Beispiele für die syntaktischen und semantischen Konzepte aus den beiden vorigen Unterabschnitten. Später wird uns die arithmetische Sprache auch beim Unvollständigkeitssatz wiederbegegnen. Dieser Unterabschnitt basiert in Teilen auf [BBJ07, Abschnitt 9.1].

Dafür reduzieren wir die Relations- und Funktionssymbole aus Σ_∞ wie folgt:

Definition 3.27 (arithmetische Sprache)**.** Sei $\Sigma_{\text{arithmetisch}}$ die Signatur erster Stufe mit

- $\mathcal{R} := \{R_0^2\}$ und
- $\mathcal{F} := \{f_0^0, f_0^1, f_0^2, f_1^2\}$,

wobei die Stelligkeit eines Symbols durch den hochgestellten Index bestimmt ist. Die **arithmetische Sprache** $\mathcal{L}_{\text{arithmetisch}} := \mathcal{L}_{\Sigma_{\text{arithmetisch}}}$ ist die Menge aller Formeln über dieser Signatur. Die Sprache der Aussagen in der arithmetischen Sprache bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}} := \mathcal{A}_{\Sigma_{\text{arithmetisch}}}$.

Mit dieser Auswahl können wir nun mithilfe der sogenannten Standardinterpretation die Rechenoperatoren auf den natürlichen Zahlen mit der Null in der arithmetischen Sprache abbilden und modellieren.

Definition 3.28 (Standardinterpretation der arithmetischen Sprache)**.** Für die **Standardinterpretation der arithmetischen Sprache** $\mathcal{N}$ betrachten wir als Universum die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null $\mathcal{U}_{\mathcal{N}} := \mathbb{N}_0$ und folgende Denotationen:

$$\begin{aligned}
(R_0^2)^{\mathcal{N}} &:= \{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 : n < m\} \\
(f_0^0)^{\mathcal{N}} &:= 0 \\
(f_0^1)^{\mathcal{N}} &: n \mapsto n+1 \\
(f_0^2)^{\mathcal{N}} &: (n,m) \mapsto n+m \\
(f_1^2)^{\mathcal{N}} &: (n,m) \mapsto n \cdot m
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.29. Angelehnt an die Standardinterpretation werden wir als Vereinfachung statt der kryptischen Relations- und Funktionssymbole die gewohnteren Notationen $<, \underline{0}, ', +, \cdot$ auf folgende Weise verwenden: Wir schreiben

$$\begin{aligned}
t < u &\text{ statt } R_0^2(t,u) \\
\underline{0} &\text{ statt } f_0^0 \\
t' &\text{ statt } f_0^1(t) \\
t + u &\text{ statt } f_0^2(t,u) \\
t \cdot u &\text{ statt } f_1^2(t,u)
\end{aligned}$$

für Terme t, u. Hierbei unterstreichen wir die Null, um diese von der natürlichen Zahl $0 \in \mathbb{N}_0$ auf der Metaebene der Arbeit zu unterscheiden.

Wir beachten außerdem, dass wir aus Gewohnheit auf die übliche Infix- und Postfixnotationen zurückgreifen. Deshalb ist es gegebenenfalls notwendig, Klammern zu setzen.

Beispiel 3.30 (arithmetische Sprache)**.** Als Beispiel meinen wir mit der vereinfachten Schreibweise

$$\neg\exists x(\underline{0} < x \land x < \underline{0}')$$

die Aussage

$$\neg\exists x(R_0^2(f_0^0, x) \land R_0^2(x, f_0^1(f_0^0)))$$

mit den eigentlichen Relations- und Funktionssymbolen.

Wichtig anzumerken ist, dass es für die arithmetische Sprache $\mathcal{L}_{\text{arithmetisch}}$ nicht nur eine Interpretation gibt. Verschiedene Interpretationen führen auch eventuell zu verschiedenen Wahrheitswerten von Aussagen:

Beispiel 3.31 (andere Interpretation der arithmetischen Sprache)**.** Wir wählen für eine andere Interpretation $\mathcal{Z}$ der arithmetischen Sprache das Universum $\mathcal{U}_{\mathcal{Z}} := \mathbb{Z}$ und erweitern die Denotationen aus der Standardinterpretation auf die ganzen Zahlen. Nun betrachten wir folgende zwei Aussagen:

$$\forall x(x \equiv \underline{0} \vee \underline{0} < x) \tag{3}$$
$$\neg\exists x(\underline{0} < x \wedge x < \underline{0}') \tag{4}$$

In der Standardinterpretation ist die Aussage (3) wahr, denn es gibt keine kleineren Zahlen als 0 in $\mathbb{N}_0$. Jedoch ist diese Aussage in der Interpretation $\mathcal{Z}$ falsch, da beispielsweise $-1 < 0$.
Wir sehen außerdem, dass die Aussage (4) in beiden Interpretationen wahr ist, da wir keine Zahl zwischen 0 und 1 haben. Anders sähe es aus, wenn wir eine weitere Interpretation mit Universum $\mathbb{Q}$ dazuholen. Denn hier wäre die Aussage (4) auch falsch, da beispielsweise $0 < \frac{1}{2} < 1$.

Beispiel 3.32 (einelementige Interpretation der arithmetischen Sprache)**.** Interpretationen müssen nicht immer von großer Struktur sein, wie in den eben betrachteten Fällen. Wir können uns eine Interpretation $\mathcal{E}$ mit einelementigem Universum $\mathcal{U}_{\mathcal{E}} := \{e\}$ definieren. Die Denotationen definieren wir dann etwa wie folgt:

$$\begin{aligned}
&(R_0^2)^{\mathcal{E}} := \emptyset \\
&(f_0^0)^{\mathcal{E}} := e \\
&(f_0^1)^{\mathcal{E}} : n \mapsto e \\
&(f_0^2)^{\mathcal{E}} : (n, m) \mapsto e \\
&(f_1^2)^{\mathcal{E}} : (n, m) \mapsto e
\end{aligned}$$

Bei einem einelementigen Universum sehen wir, dass wir bei den Denotationen für die Funktionssymbole keine andere Wahl als konstant Null haben. Der Spielraum für zweistellige Relationen ist ebenfalls klein, weil es für diese nur die beiden trivialen Möglichkeiten $\emptyset$ und $\{(e, e)\}$ gibt.

Für später ist es relevant, alle natürlichen Zahlen in der arithmetischen Sprache beschreiben zu können. Trotz der Einschränkung, dass wir nur die Null als Konstante erlauben, ist dies mithilfe von Numeralen möglich.

Definition 3.33 (Numeral)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist das **Numeral** von n, welches wir unterstrichen $\underline{n}$ bezeichnen, der Term

$$\underline{n} := (f_0^1)^n f_0^0 = \underbrace{f_0^1 \dots f_0^1}_{n\text{-mal}} f_0^0$$

in $\Sigma_{\text{arithmetisch}}{}^*$.

Proposition 3.34. *Die Abbildung* $\underline{\cdot} : \mathbb{N}_0 \to \{f_0^1\}^*\{f_0^0\}, n \mapsto \underline{n}$ *und ihre Umkehrabbildung sind berechenbar.*

Beweis. Die n-fache Konkatenation von Symbolen gegeben einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ und das Zählen der Häufigkeit des Symbols f_0^1 gegeben eines Terms in Form eines Numerals sind berechenbar. □

Bemerkung 3.35. Das Numeral für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ entspricht in unserer vereinfachten Schreibweise einer Null mit n-vielen Nachfolger-Strichen, also

$$\underline{n} = \underline{0}' \ldots ' \ .$$

In der Standardinterpretation interpretieren wir das Numeral $\underline{n}$ also tatsächlich mit dem Element $n \in \mathbb{N}_0$.

Anders als in unserer Definition hätten wir in der arithmetischen Sprache für jede natürliche Zahl ein Konstantensymbol definieren können. Da wir aber eine minimale Signatur haben wollen und trotzdem durch Numerale alle natürlichen Zahlen erreichen, genügt uns diese Definition.

4 Folgerung und Ableitung

In diesem Abschnitt schauen wir uns die Begriffe der Folgerung, sowie Ableitung an. Beide dieser Konzepte folgen dem Prinzip, aus einer Menge von Aussagen Γ eine weitere Aussage A zu erhalten, die aus denen „folgt". Dieses Prinzip ist uns bereits aus mathematischen Beweisen geläufig, wo wir mit Axiomen oder Annahmen Γ beginnen, um dann zu argumentieren, dass unter diesen Annahmen auch A gilt.

Der Begriff der Folgerung ist dabei von rein semantischer Natur, also erhalten wir bei einer Folgerung die Aussage A aus den Modellen von Γ. Hingegen ist die Ableitung ein syntaktischer Begriff, wo wir A durch bestimmte Manipulation der Aussagen aus Γ als Wörter erhalten, ohne deren Bedeutung zu kennen.

Ein wichtiges und interessantes Ergebnis, das wir anschließend sehen werden, ist die Adäquatheit, dass diese Begriffe tatsächlich auch übereinstimmen.

Sei in diesem Abschnitt Σ eine beliebige zugrundeliegende Signatur erster Stufe.

4.1 Folgerungsbeziehung

In diesem Unterabschnitt definieren wir einige Begriffe bezüglich der sogenannten Folgerungsbeziehung, basierend auf [EFT18, Abschnitt 3.4]

Wie bereits in der Einleitung des Abschnitts erwähnt, ist die Folgerung ein Begriff der Semantik und wie folgt gegeben.

Definition 4.1 (semantische Folgerung)**.** Sei Γ eine Menge von Aussagen. Eine Aussage A ist eine (semantische) **Folgerung** aus Γ, kurz A **folgt** aus Γ, wenn jede Interpretation, die Modell von Γ ist, auch Modell von A ist. In diesem Fall schreiben wir auch $\Gamma \vDash A$.

Es gibt weiterhin Aussagen, die aus rein logischen Gründen in jeder Interpretation wahr sein müssen.

Definition 4.2 (allgemeingültig)**.** Eine Aussage A heißt **allgemeingültig**, kurz $\vDash A$, wenn diese in jeder Interpretation wahr ist, also $\emptyset \vDash A$.

Beispiel 4.3. Ein einfaches Beispiel für eine allgemeingültige Aussage wäre $\forall x(x \equiv x)$.

Weiter ist der Begriff der logischen Äquivalenz nützlich:

Definition 4.4 (logisch äquivalent)**.** Zwei Aussagen A und B heißen **logisch äquivalent**, wenn sowohl $\{A\} \vDash B$ als auch $\{B\} \vDash A$.

Proposition 4.5. *Seien A und B Aussagen. Dann sind äquivalent:*

(i) A und B sind logisch äquivalent.

(ii) Die Aussage $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig.

Beweis. A und B sind per Definition genau dann logisch äquivalent, wenn sie in denselben Interpretationen wahr sind. Also gilt genau dann, dass in jeder Interpretation die Aussage $A \leftrightarrow B$ wahr ist. Per Definition ist $A \leftrightarrow B$ genau dann allgemeingültig. $\square$

Auf der semantischen Seite ist außerdem noch der Begriff der Erfüllbarkeit ebenso von Bedeutung für uns. Wie sich u.A. im Unterabschnitt 4.3 herausstellt, ist die Erfüllbarkeit eng verbunden mit der Folgerungsbeziehung.

Definition 4.6 (erfüllbar)**.** Eine Menge von Aussagen Γ heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \vDash \Gamma$ gibt. Eine Aussage A heißt **erfüllbar**, wenn $\{A\}$ erfüllbar ist.

4.2 Sequenzenkalkül

Beim mathematischen Beweisen beginnen wir üblicherweise mit Annahmen, seien diese Axiome oder Bedingungen in Form von Aussagen, und kommen dann mithilfe von logischen Schlüssen in endlich vielen Schritten zu neuen Aussagen, die aus diesen Annahmen folgen. Dieses Vorgehen werden wir nun mithilfe eines sogenannten Sequenzenkalküls abbilden, womit wir aus Aussagen weitere Aussagen ableiten können, rein durch syntaktische Manipulation. Bei den folgenden Definitionen und insbesondere beim Sequenzenkalkül orientieren wir uns im Wesentlichen an [BBJ07, Abschnitt 14].

Definition 4.7 (Sequenz)**.** Seien Γ, Δ endliche Mengen von Aussagen. Eine **Sequenz** ist ein Paar (Γ, Δ), welches wir mit $\Gamma \implies \Delta$ bezeichnen. Wir nennen die linke Seite Γ **Antezedenz** und die rechte Seite Δ **Sukzedenz**.

Oft wird in anderer Literatur, wie z.B. [EFT18], eine Sequenz als endliche Folge von Aussagen bzw. Formeln definiert. Durch unsere Definition vermeiden wir es jedoch, die Reihenfolge manipulieren oder Duplikate von Aussagen eliminieren zu müssen.

Sequenzen wollen wir mit semantischen Folgerungen assoziieren. Hierfür definieren wir im Folgenden, wann eine Sequenz korrekt ist:

Definition 4.8 (korrekt)**.** Eine Sequenz $\Gamma \implies \Delta$ heißt **korrekt**, wenn in jeder Interpretation, in der alle Aussagen aus Γ wahr sind, auch mindestens eine Aussage aus Δ wahr ist.

Der nächste Schritt ist es, Schlussregeln einzuführen, um mit diesen in einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer gewünschten Sequenz zu kommen. Dafür führen wir weiter folgende Notation ein:

Definition 4.9 (Schlussregel)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Sequenzen-**Schlussregel** ist ein Sequenzentupel $(\Gamma_1 \implies \Delta_1, \ldots, \Gamma_k \implies \Delta_k)$, welches wir im folgenden Schema notieren:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \implies & \Delta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{k-1} & \implies & \Delta_{k-1} \\ \hline \Gamma_k & \implies & \Delta_k \end{array}$$

Dabei schreiben wir die Sequenz $\Gamma_k \implies \Delta_k$ immer unter die Linie und über die Linie die übrig gebliebenen Sequenzen $\Gamma_1 \implies \Delta_1$ bis $\Gamma_{k-1} \implies \Delta_{k-1}$.

Definition 4.10 (Sequenzenkalkül)**.** Ein **Sequenzenkalkül** $\mathfrak{K}$ ist eine Menge von Sequenzen-Schlussregeln.

Innerhalb eines Sequenzenkalküls können wir nun den Schlussregeln entsprechend Sequenzen herleiten.

Definition 4.11 (Herleitung in einem Sequenzenkalkül)**.** Sei $\mathfrak{K}$ ein Sequenzenkalkül und

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & \implies & \Delta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{k-1} & \implies & \Delta_{k-1} \\ \hline \Gamma_k & \implies & \Delta_k \end{array}$$

eine Schlussregel in $\mathfrak{K}$. Die Sequenz unter der Linie $\Gamma_k \implies \Delta_k$ hat eine **Herleitung** in $\mathfrak{K}$, bzw. $\Gamma_k \implies \Delta_k$ ist **herleitbar**, wenn es für alle Sequenzen über der Linie $\Gamma_i \implies \Delta_i$ mit $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ eine Herleitung in $\mathfrak{K}$ gibt.

Bemerkung 4.12. Die Definition der Herleitbarkeit ist also induktiv, wobei die Induktion durch Schlussregeln mit $k = 1$ eingeleitet wird. Diese notieren wir insbesondere wie folgt:

$$\begin{array}{c} \\ \hline \Gamma_1 \implies \Delta_1 \end{array}$$

Angenommen, dass in einem Sequenzenkalkül alle hergeleiteten Sequenzen korrekt sind. So soll intuitiv gesehen endlich viele Anwendungen von Schlussregeln einem Beweis entsprechen, sodass die zum Schluss hergeleitete Sequenz $\Gamma \implies \{A\}$ besagt, dass falls alle Aussagen aus der Antezedenz Γ (in einer Interpretation) wahr sind, so auch die Aussage A wahr ist.

Nun definieren wir aber konkret einen Sequenzenkalkül, den wir im weiteren Verlauf der Arbeit nutzen werden. Von diesem sehen wir, dass seine syntaktischen Herleitungen tatsächlich auch semantischen Folgerungen entsprechen. Es gibt viele Herangehensweisen für Schlussregeln eines Sequenzenkalküls, die meist aber effektiv dieselben Aussagen produzieren, da diese gerade so konzipiert sind, die semantische Folgerung adäquat abzubilden.

Definition 4.13 (Der Sequenzenkalkül)**.** Sei $\mathfrak{S}$ derjenige Sequenzenkalkül mit den folgenden Schlussregeln: Seien $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$ endliche Mengen von Aussagen, A, B Aussagen, $F(x)$ eine Formel, s, t Terme ohne Variablen und c ein Konstantensymbol.

$$(\mathfrak{S}_0) \quad \frac{}{\{A\} \implies \{A\}}$$

$$(\mathfrak{S}_1) \quad \frac{\Gamma \implies \Delta}{\Gamma' \implies \Delta'} \text{, falls } \Gamma \subseteq \Gamma' \text{ und } \Delta \subseteq \Delta'.$$

$$(\mathfrak{S}_{2a}) \quad \frac{\Gamma \cup \{A\} \implies \Delta}{\Gamma \implies \{\neg A\} \cup \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_{2b}) \quad \frac{\Gamma \implies \{A\} \cup \Delta}{\Gamma \cup \{\neg A\} \implies \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_3) \quad \frac{\Gamma \cup \{A, B\} \implies \Delta}{\Gamma \cup \{(A \wedge B)\} \implies \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_4) \quad \frac{\begin{array}{c}\Gamma \implies \{A\} \cup \Delta \\ \Gamma \implies \{B\} \cup \Delta\end{array}}{\Gamma \implies \{(A \wedge B)\} \cup \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_5) \quad \frac{\Gamma \cup \{F(s)\} \implies \Delta}{\Gamma \cup \{\forall x F(x)\} \implies \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_6) \quad \frac{\Gamma \implies \{F(c)\} \cup \Delta}{\Gamma \implies \{\forall x F(x)\} \cup \Delta} \text{, falls } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta \text{ oder } F(x).$$

$$(\mathfrak{S}_7)\quad \frac{\Gamma \cup \{s \equiv s\} \implies \Delta}{\Gamma \implies \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_{8a})\quad \frac{\Gamma \implies \{F(t)\} \cup \Delta}{\Gamma \cup \{s \equiv t\} \implies \{F(s)\} \cup \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_{8b})\quad \frac{\Gamma \cup \{F(t)\} \implies \Delta}{\Gamma \cup \{s \equiv t, F(s)\} \implies \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_{9a})\quad \frac{\Gamma \cup \{\neg A\} \implies \Delta}{\Gamma \implies \{A\} \cup \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_{9b})\quad \frac{\Gamma \implies \{\neg A\} \cup \Delta}{\Gamma \cup \{A\} \implies \Delta}$$

$$(\mathfrak{S}_{10})\quad \frac{\Gamma \implies \{A\} \cup \Delta \qquad \Gamma \cup \{A\} \implies \Delta}{\Gamma \implies \Delta}$$

Hieraus gewinnen wir, unter Vorbehalt der Korrektheit bzw. Adäquatheit, folgende natürliche Definition:

Definition 4.14 (syntaktisch ableitbar / beweisbar)**.** Sei Γ eine Menge von Aussagen. Eine Aussage A ist aus Γ (syntaktisch) **ableitbar** oder auch **beweisbar**, wenn es eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ gibt, sodass die Sequenz $\Gamma_0 \implies \{A\}$ eine Herleitung im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ hat. In diesem Fall schreiben wir kurz $\Gamma \vdash A$ oder auch $\vdash_\Gamma A$.

Beispiel 4.15 (Ableitung einer Disjunktion aus einer Disjunkten)**.** Seien A und B zwei Aussagen. Als Beispiel für eine syntaktische Ableitung, wollen wir sehen, dass man aus A die Disjunktion $A \vee B$ ableiten kann. Also zeigen wir, dass $\{A\} \vdash A \vee B$: Wir wenden Regeln des Sequenzenkalküls $\mathfrak{S}$ an und erhalten damit in jeder der nachfolgenden Zeilen eine in $\mathfrak{S}$ herleitbare Sequenz:

$$\begin{aligned}
\{A\} &\implies \{A\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_0)\\
\{A, \neg A\} &\implies \{\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_{2b})\\
\{A, \neg A, \neg B\} &\implies \{\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_1)\\
\{A, \neg A \wedge \neg B\} &\implies \{\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_3)\\
\{A\} &\implies \{\neg(\neg A \wedge \neg B)\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_{2a})
\end{aligned}$$

Somit ist also die Sequenz $\{A\} \implies \{A \vee B\}$ herleitbar, da $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$ die abkürzende Schreibweise ist. Insgesamt ist also $A \vee B$ aus A syntaktisch ableitbar.

Anschließend definieren wir den syntaktischen Begriff der Konsistenz wie folgt:

Definition 4.16 (konsistent, inkonsistent)**.** Eine Menge von Aussagen Γ heißt **konsistent**, auch **widerspruchsfrei**, wenn nicht alle Aussagen aus ihr ableitbar sind. Weiterhin heißt eine Menge von Aussagen **inkonsistent**, auch **widerspruchsvoll**, wenn diese nicht konsistent ist.

Die Konsistenz lässt sich durch folgendes Prinzip charakterisieren, welches auch unter dem Namen *ex falso quodlibet* bekannt ist.

Lemma 4.17 (*ex falso quodlibet*)**.** *Sei Γ eine Menge von Aussagen. Dann sind äquivalent:*

(i) Γ ist konsistent.

(ii) Es gibt keine Aussage A, sodass $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i):
Sei einerseits Γ inkonsistent. Dann ist jede Aussage aus Γ ableitbar und damit gilt insbesondere für jede Aussage A, dass $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$.

(i) $\Rightarrow$ (ii):
Sei andererseits A eine Aussage, für die $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$ gilt. Per Definition der Ableitungsbeziehung gibt es endliche Teilmengen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, sodass die Sequenzen

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\implies \{A\} \\ \Gamma_2 &\implies \{\neg A\} \end{aligned}$$

in $\mathfrak{S}$ herleitbar sind. Sei nun B eine beliebige Aussage. Bemüht man die Regel $(\mathfrak{S}_1)$, um die Antezedezen dieser Sequenzen auf die endliche Menge $\Gamma_0 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ zu erweitern, so erhält man folgende herleitbaren Sequenzen:

$$\Gamma_0 \implies \{A\} \tag{5}$$
$$\Gamma_0 \implies \{\neg A\} \tag{6}$$

Wendet man nun die Regel $(\mathfrak{S}_{9b})$ auf die Sequenz in (6) an, erhält man die herleitbare Sequenz

$$\Gamma_0 \cup \{A\} \implies \emptyset\,. \tag{7}$$

Schließlich wendet man die Regel $(\mathfrak{S}_{10})$ auf die Sequenzen in (5) und (7) an und anschließend die Regel $(\mathfrak{S}_1)$ und erhält folgende herleitbare Sequenzen:

$$\Gamma_0 \implies \emptyset \qquad \text{nutze } (\mathfrak{S}_{10})$$
$$\Gamma_0 \implies \{B\} \qquad \text{nutze } (\mathfrak{S}_1)$$

Da Γ_0 eine endliche Teilmenge von Γ ist, ist die beliebige Aussage B aus Γ ableitbar. Damit ist also Γ inkonsistent. $\square$

4.3 Adäquatheit des Sequenzenkalküls

In diesem Unterabschnitt sehen wir, dass der Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ tatsächlich auch so gewählt ist, dass die syntaktischen Ableitungen den semantischen Folgerungen entsprechen. Wir sprechen in diesem Fall von Adäquatheit. Diese lässt sich sowohl für die Folgerungsbeziehung, als auch für die Erfüllbarkeit formulieren. Dieser Unterabschnitt basiert auf den Ergebnissen aus [BBJ07, Abschnitt 14.2] und [EFT18, Abschnitt 5].

Satz 4.18 (Adäquatheit des Sequenzenkalküls)**.** *Sei* Γ *eine Menge von Aussagen und* A *eine Aussage. Dann gilt*

(i) für die Folgerungsbeziehung: $\Gamma \vdash A$ *genau dann, wenn* $\Gamma \vDash A$.

(ii) für die Erfüllbarkeit: Γ *ist erfüllbar genau dann, wenn* Γ *konsistent ist.*

Die Adäquatheit unterteilen wir in zwei Teile, nämlich in die Korrektheit und die Vollständigkeit des Sequenzenkalküls. Die Korrektheit des Sequenzenkalküls $\mathfrak{S}$ bedeutet hierbei, dass jede syntaktische Ableitung tatsächlich auch eine semantische Folgerung ist. Insbesondere heißt das, dass wir mit den Schlussregeln nicht mehr beweisen können, als semantisch korrekt. Die Vollständigkeit besagt, dass wir umgekehrt jede semantische Folgerung durch syntaktische Ableitung über den definierten Sequenzenkalkül erhalten können.

4.3.1 Korrektheit

Satz 4.19 (Korrektheitssatz, [BBJ07, 14.1])**.** *Sei* Γ *eine Menge von Aussagen und* A *eine Aussage. Wenn* $\Gamma \vdash A$ *gilt, dann gilt auch* $\Gamma \vDash A$.

Einen vollständigen Beweis, wie dem in [BBJ07, Abschnitt 14.2] lassen wir hier aus, jedoch geben wir eine grobe Skizzierung an:

Beweisskizze. Für den Beweis des Korrektheissatzes zeigt man für jede Schlussregel

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1 & \Longrightarrow & \Delta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{k-1} & \Longrightarrow & \Delta_{k-1} \\ \hline \Gamma_k & \Longrightarrow & \Delta_k \end{array}$$

von $\mathfrak{S}$, dass folgendes gilt: Falls alle Sequenzen über der Linie $\Gamma_i \Longrightarrow \Delta_i$ mit $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ korrekt sind, so ist auch die Sequenz unter der Linie $\Gamma_k \Longrightarrow \Delta_k$ korrekt. Dies zeigt dann also, dass alle herleitbare Sequenzen korrekt sind. Damit lässt sich dann auch schon die Aussage des Satzes folgern. □

Daraus lässt sich dann auch die eine Implikation der Adäquatheit für die Erfüllbarkeit folgern.

Korollar 4.20. *Sei Γ eine erfüllbare Menge von Aussagen. Dann ist Γ konsistent.*

Beweis. Angenommen Γ ist inkonsistent. Dann gilt für eine beliebige Aussage A gleichzeitig $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$, da sich alle Aussagen aus Γ ableiten lassen. Gemäß Korrektheitssatz 4.19 gilt also auch $\Gamma \vDash A$ und $\Gamma \vDash \neg A$. Es kann keine Interpretation geben, in der sowohl A als auch $\neg A$ wahr ist, weshalb Γ nicht erfüllbar sein kann. □

4.3.2 Vollständigkeit

Für die Vollständigkeit zeigt man zunächst den Modellexistenzsatz, der die andere Implikation der Adäquatheit für die Erfüllbarkeit darstellt.

Satz 4.21 (Modellexistenzsatz, [EFT18, Abschnitt 5])**.** *Sei Γ eine konsistente Menge von Aussagen. Dann ist Γ erfüllbar.*

Den Beweis dieses Satzes lassen wir hier ebenfalls aus. In [EFT18, Abschnitt 5] wird dieser jedoch vollständig angegeben. Darin wird eine Sprache erster Stufe mit einer Interpretation, die Modell von Γ ist, konstruiert. Zwar wird dabei ein anderer Sequenzenkalkül in Betracht gezogen, der aber im Wesentlichen ähnlich zu $\mathfrak{S}$ ist. Andernfalls betrachtet man den Beweis in [BBJ07, Abschnitt 13], der auf demselben Sequenzenkalkül basiert und einen ähnlichen Ansatz verfolgt.

Hieraus lässt sich dann die Vollständigkeit von $\mathfrak{S}$ folgern. Dafür benötigen wir jedoch folgende zwei ähnliche Lemmata:

Lemma 4.22. *Sei Γ eine Menge von Aussagen und A eine Aussage. Dann sind äquivalent:*

(i) $\Gamma \vDash A$

(ii) $\Gamma \cup \{\neg A\}$ *ist nicht erfüllbar.*

Beweis. $\Gamma \vDash A$ bedeutet per Definition, dass jede Interpretation, die Modell von Γ ist, auch Modell von A ist. Mit anderen Worten, gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$, sodass $\mathcal{I} \vDash \Gamma$, aber $\mathcal{I} \nvDash A$. Dies gilt genau dann, wenn es keine Interpretation $\mathcal{I}$ gibt, sodass $\mathcal{I} \vDash \Gamma \cup \{\neg A\}$, da per Definition des Wahrheitswerts $\mathcal{I} \nvDash A$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \vDash \neg A$. Das bedeutet wiederum, dass genau dann $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar ist. □

Lemma 4.23. *Sei Γ eine Menge von Aussagen und A eine Aussage. Dann sind äquivalent:*

(i) $\Gamma \vdash A$

(ii) $\Gamma \cup \{\neg A\}$ *ist inkonsistent.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii):
Sei einerseits $\Gamma \vdash A$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, sodass die Sequenz $\Gamma_0 \implies \{A\}$ eine Herleitung im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ hat. Bemüht man die Regel $(\mathfrak{S}_1)$, um die Antezedenz auf die endliche Menge $\Gamma_0 \cup \{\neg A\}$ zu erweitern, so ist die Sequenz $\Gamma_0 \cup \{\neg A\} \implies \{A\}$ herleitbar. Damit erhalten wir $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$. Da aber auch offenbar $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$ gilt, ist $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nach Lemma 4.17 inkonsistent.

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Sei nun andererseits $\Gamma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent, dann lässt sich jede Aussage aus dieser Menge ableiten, also insbesondere auch die Aussage A. Somit gibt es eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \cup \{\neg A\}$, sodass die Sequenz $\Gamma_0 \implies \{A\}$ eine Herleitung in $\mathfrak{S}$ hat. Wir definieren $\Gamma_0' := \Gamma_0 \setminus \{\neg A\}$. Somit gilt $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_0' \cup \{\neg A\}$ und wir erhalten folgende herleitbare Sequenzen:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\implies \{A\} && \\ \Gamma_0' \cup \{\neg A\} &\implies \{A\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_1) \\ \Gamma_0' &\implies \{A\} \cup \{A\} && \text{nutze } (\mathfrak{S}_{9a}) \\ \Gamma_0' &\implies \{A\} && \end{aligned}$$

Da Γ_0' eine Teilmenge von Γ ist, gilt also $\Gamma \vdash A$. □

Korollar 4.24 (Vollständigkeitssatz)**.** *Sei* Γ *eine Menge von Aussagen und* A *eine Aussage. Wenn* $\Gamma \vDash A$ *gilt, dann gilt auch* $\Gamma \vdash A$.

Beweis. Es gelte $\Gamma \vDash A$. Aus Lemma 4.22 erhalten wir, dass $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar ist. Damit ist gemäß Kontraposition des Modellexistenzsatzes 4.21 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent. Schließlich folgt mit Lemma 4.23 (i), dass $\Gamma \vdash A$ gilt. □

4.4 Theorien

Wir führen in diesem Unterabschnitt den Begriff einer Theorie ein und zeigen einige Eigenschaften, die sich uns später als nützlich erweisen. Außerdem führen wir die sogenannte minimale Arithmetik ein. Diese spielt für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz eine zentrale Rolle, da sie hinreichend mächtig ist, auf gewisse Weise, Aussagen über sich treffen zu können. Wir folgen dabei in diesem Unterabschnitt den Definitionen aus [BBJ07, Abschnitt 15.1] für Theorien sowie den Ergebnissen aus [BBJ07, Abschnitt 16] bezüglich der minimalen Arithmetik.

Definition 4.25 (deduktiv abgeschlossen)**.** Sei Γ eine Menge von Aussagen. Wir nennen Γ **deduktiv abgeschlossen**, wenn Γ alle Aussagen enthält, die aus Γ ableitbar sind. Also, wenn für jede Aussage $A \in \mathcal{A}_\Sigma$

$$\Gamma \vdash A \text{ genau dann, wenn } A \in \Gamma$$

gilt.

Definition 4.26 (Theorie)**.** Eine **Theorie** T der Sprache $\mathcal{L}_\Sigma$ ist eine **deduktiv abgeschlossene** Menge von Aussagen.

Wir führen als Beispiel nun die Theorien der minimalen Arithmetik und der Peano-Arithmetik ein. Die Theorien dieser Arithmetiken legen wir mithilfe von Axiomen fest, die einige Rechenregeln und Eigenschaften zusammenfassen, die wir aus der Arithmetik auf den natürlichen Zahlen mit 0 kennen.

Beispiel 4.27 (Axiome der minimalen Arithmetik)**.** Für die **minimale Arithmetik** zählen wir folgende Aussagen der arithmetischen Sprache $\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}$ als Axiome auf (vgl. *Abschnitt 16.2* [BBJ07]).

$$\begin{array}{rrl}
\text{(Q1)} & \forall x & \neg(x' \equiv \underline{0}) \\
\text{(Q2)} & \forall x & x + \underline{0} \equiv x \\
\text{(Q3)} & \forall x & x \cdot \underline{0} \equiv \underline{0} \\
\text{(Q4)} & \forall x \forall y & x' \equiv y' \to x \equiv y \\
\text{(Q5)} & \forall x \forall y & x + y' \equiv (x + y)' \\
\text{(Q6)} & \forall x \forall y & x \cdot y' \equiv (x \cdot y) + x \\
\text{(Q7)} & \forall x & \neg(x < \underline{0}) \\
\text{(Q8)} & \forall x \forall y & x < y' \leftrightarrow (x < y \vee x \equiv y) \\
\text{(Q9)} & \forall x & \underline{0} < x \leftrightarrow \neg(x \equiv \underline{0}) \\
\text{(Q10)} & \forall x \forall y & x' < y \leftrightarrow (x < y \wedge \neg(y \equiv x'))
\end{array}$$

Beispiel 4.28 (Axiome der Peano-Arithmetik)**.** Für die **Peano-Arithmetik** zählen wir zusätzlich zu den Axiomen der minimalen Arithmetik aus Beispiel 4.27 eine Familie von Axiomen auf, die man als Axiome der vollständigen Induktion kennt: Für jede Formel $F(x)$ nehmen wir die Aussage

$$(F(\underline{0}) \wedge \forall x(F(x) \to F(x'))) \to \forall x\ F(x)$$

als Axiom hinzu.

Definition 4.29 (Theorie der minimalen Arithmetik)**.** Die Theorie der arithmetischen Sprache, die aus genau den Aussagen besteht, die aus den Axiomen (Q1) bis (Q10) aus Beispiel 4.27 ableitbar sind, nennen wir **Theorie der minimalen Arithmetik** und bezeichnen wir mit $\mathbf{Q}$.

Definition 4.30 (Theorie der Peano-Arithmetik)**.** Die Theorie der arithmetischen Sprache, die aus genau den Aussagen besteht, die aus den Axiomen (Q1) bis (Q10) und der Familie von Axiomen der vollständigen Induktion aus den Beispielen 4.27 und 4.28 ableitbar sind, nennen wir **Theorie der Peano-Arithmetik** und bezeichnen wir mit $\mathbf{P}$.

Bemerkung 4.31. Die Standardinterpretation $\mathcal{N}$ ist Modell der Theorien $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$. Dies gilt, da die Axiome aus den Beispielen 4.27 und 4.28 auf $\mathbb{N}_0$ mit den üblichen Funktionen/Relationen wahr sind. Gemäß Adäquatheitssatz 4.18 sind somit auch die aus diesen Axiomen ableitbaren Aussagen in $\mathcal{N}$ wahr. Die Theorien $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$ sind damit insbesondere erfüllbar.

Wir führen nun einige Begriffe ein, die Theorien beschreiben.

Definition 4.32 (Erweiterung)**.** Sei S eine Theorie. Eine **Erweiterung** von S ist eine Theorie T, die S enthält, also $S \subseteq T$.

Definition 4.33 (axiomatisierbar)**.** Eine Theorie T heißt **axiomatisierbar**, wenn es eine berechenbare Menge Γ gibt, sodass $T = \{A \in \mathcal{A}_\Sigma : \Gamma \vdash A\}$ aus genau den Aussagen besteht, die aus Γ ableitbar sind.

Beispiel 4.34. Da die Menge der Axiome aus den Beispielen 4.27 und 4.28 endlich bzw. effektiv berechenbar sind, sehen wir anhand der Definitionen leicht, dass

(i) die Theorie der minimalen Arithmetik $\mathbf{Q}$ eine axiomatisierbare Theorie ist und

(ii) die Theorie der Peano-Arithmetik $\mathbf{P}$ eine axiomatisierbare Erweiterung von $\mathbf{Q}$ ist.

Definition 4.35 (vollständig)**.** Eine Theorie T heißt **vollständig**, wenn für jede Aussage $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ gilt, dass $A \in T$ oder $\neg A \in T$.

Außerdem lässt sich die Konsistenz einer Theorie auf folgendeweise charakterisieren.

Korollar 4.36. *Sei T eine Theorie. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist konsistent.

(ii) T enthält nicht jede Aussage.

(iii) Es gibt keine Aussage A, für die $A \in T$ und $\neg A \in T$ gilt.

Beweis. Die Äquivalenzen folgen direkt aus Lemma 4.17 und der Definition einer Theorie, da T gerade genau aus den Aussagen besteht, die aus ihr ableitbar sind. $\square$

Weiter wollen wir Begriffe wie Funktionen und Mengen in die arithmetische Sprache einbetten, um diese in Theorien nutzen zu können. Dies benötigen wir später auch für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz.

Definition 4.37 (repräsentierbare Funktion)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ heißt **repräsentierbar** in einer Theorie T der arithmetischen Sprache, wenn es eine Formel $F(x, y) \in \mathcal{L}_{\text{arithmetisch}}$ gibt, die f in T **repräsentiert**, also wenn für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $f(a) = b$ gilt:

$$\vdash_T \forall y(F(\underline{a}, y) \leftrightarrow y \equiv \underline{b})$$

Definition 4.38 (definierbare Menge)**.** Eine Menge $S \subseteq \mathbb{N}_0$ natürlicher Zahlen heißt **definierbar** in einer Theorie T der arithmetischen Sprache, wenn es eine Formel $D(x) \in \mathcal{L}_{\text{arithmetisch}}$ gibt, die S in T **definiert**, also wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Wenn } n \in S, \text{ dann } \vdash_T D(\underline{n}) \text{ und} \\ &\text{wenn } n \notin S, \text{ dann } \vdash_T \neg D(\underline{n}) \end{aligned}$$

Die bereits angesprochene hinreichende Mächtigkeit der Theorie **Q** macht sich anhand des folgenden Satzes erkennbar.

Satz 4.39 (Definierbarkeit und Repräsentierbarkeit in **Q**, [BBJ07, 16.16])**.**

(i) Berechenbare Funktionen sind in **Q** *repräsentierbar.*

(ii) Entscheidbare Mengen sind in **Q** *definierbar.*

Den Beweis dieses Satzes lassen wir aus. Dieser ist aber in [BBJ07, 16.16] vorzufinden. Jedoch ist hier anzumerken, dass in diesem Beweis der Begriff der *rekursiven* Funktionen und Mengen benutzt wird, da die Definition dieser innerhalb der arithmetischen Sprache zugänglicher ist. In [BBJ07, 8.2] wird auch gezeigt, dass diese Begriffe mit Turing-berechenbaren Funktionen und Turing-entscheidbaren Mengen, die in der Formulierung von 4.39 benutzt werden, übereinstimmen.

5 Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem ersten Unvollständigkeitssatz von Gödel. Dieser sagt aus, dass keine hinreichend mächtige Theorie gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig sein kann. Dabei betrachten wir Theorien, die mindestens die Axiome der minimalen Arithmetik enthalten, ergo Theorien, die **Q** enthalten, da in ihnen berechenbare Funktionen repräsentierbar und entscheidbare Mengen definierbar sind. In anderen Worten sagt uns der Satz, dass es Aussagen gibt, die zwar beispielsweise in der Standardinterpretation $\mathcal{N}$ wahr sind, jedoch zumindest von den Axiomen aus nicht beweisbar sind.

Sei im gesamten Abschnitt $\Sigma_{\text{arithmetisch}}$ die zugrundeliegende Signatur erster Stufe, falls nicht anders angegeben. Die Resultate lassen sich jedoch analog auf Σ_∞ übertragen, da $\Sigma_{\text{arithmetisch}}$ nur eine Einschränkung der Signatur ist.

5.1 Entscheidbare Theorien

In diesem Unterabschnitt betrachten wir die Entscheidbarkeit von Theorien und insbesondere dadurch die Entscheidbarkeit der syntaktischen Ableitungen. Dabei orientieren wir uns an den Resultaten und Beweisen aus [BBJ07, Abschnitt 15.1].

Dafür sehen wir zunächst, dass die arithmetische Sprache und die Sprache ihrer Aussagen entscheidbar sind. Um die Entscheidbarkeit der arithmetischen Sprache zu analysieren, stoßen wir auf das Hindernis, dass unsere Signaturen nicht endlich sind. Dies ist jedoch eine grundlegende Forderung an die Alphabete einer Turingmaschine und damit auch notwendig für Entscheidbarkeit einer Sprache. Da aber die Signatur Σ_∞ abzählbar ist, können wir eine Modifikation der Signatur vornehmen, um ein endliches Alphabet Σ_0 zu generieren, womit wir Wörter aus Σ_∞^* mit Wörtern aus Σ_0^* identifizieren. Wir gehen dafür ähnlich zu [EFT18, S. 182] vor.

Definition 5.1 (endliches Alphabet für Σ_∞)**.** Sei

$$\Sigma_0 := \{\neg, \wedge, \forall, \equiv, v, R, f, \uparrow, \downarrow\}$$

das **endliche Alphabet für** Σ_∞ und $\varphi : \Sigma_\infty^* \to \Sigma_0^*$ der eindeutige Homomorphismus von Sprachen mit

$$\begin{aligned} \varphi(*) &:= * \\ \varphi(v_i) &:= v{\downarrow}^i \\ \varphi(R_i^k) &:= R{\downarrow}^i{\uparrow}^k \\ \varphi(f_i^m) &:= f{\downarrow}^i{\uparrow}^m \end{aligned}$$

für alle $* \in \{\neg, \wedge, \forall, \equiv\}$, sowie $i, m \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.2. Wir betrachten das Wort

$$R_0^2 f_1^2 v_0 f_0^0 v_1,$$

das in vereinfachter Notation der Formel $x \cdot \underline{0} < y$ der arithmetischen Sprache entspricht. Im endlichen Alphabet ordnen wir diesem dann das Wort

$$\varphi(R_0^2 f_1^2 v_0 f_0^0 v_1) = R{\uparrow\uparrow}\, f{\downarrow\uparrow\uparrow}\, vfv{\downarrow}$$

zu.

Bemerkung 5.3. Der Homomorphismus φ ordnet also jedem der Variablen-, Relations- und Funktionssymbole ein Wort zu, das durch die Anzahl der direkt nachfolgenden $\downarrow$ den unteren Index und mit der Anzahl der direkt nachfolgenden $\uparrow$ den oberen Index festlegt. Dadurch ist φ injektiv.

Außerdem ist $\varphi(\Sigma_\infty^*) \subseteq \Sigma_0^*$ entscheidbar, da sich effektiv prüfen lässt, ob ein Wort $w \in \Sigma_0^*$ den Abbildungsregeln von φ folgt.

Wir werden von nun an Wörter und Sprachen über Σ_∞ mit Wörtern und Sprachen über Σ_0 durch φ identifizieren, ohne explizit den Übergang in Σ_0 durch φ zu nennen. Insbesondere meinen wir mit der Entscheidbarkeit bzw. rekursiven Aufzählbarkeit einer Sprache $L \subseteq \Sigma_\infty^*$ die der Sprache $\varphi(L) \subseteq \Sigma_0^*$.

Proposition 5.4. *Die Sprachen $\mathcal{L}_{\Sigma_\infty}$ und $\mathcal{A}_{\Sigma_\infty}$ sind entscheidbar.*

Beweis. Im Unterabschnitt 3.1 sehen wir, dass wir die Sprache der Formeln $\mathcal{L}_{\Sigma_\infty}$ durch einfache Produktionsregeln aus den Definitionen 3.4 bis 3.7 erhalten. Man kann insbesondere leicht sehen, dass sich durch ein effektives Vorgehen auf einer Turingmaschine entscheiden lässt, ob ein Wort über Σ_∞ auch tatsächlich eine Formel bildet. Insbesondere heißt das, dass die Sprache $\mathcal{L}_{\Sigma_\infty}$ entscheidbar ist. Weiterhin kann man durch Ablaufen einer Formel und Prüfen der vorkommenden Variablen, ob diese unmittelbar nach einem Quantor folgen, effektiv entscheiden, ob eine Formel $F \in \mathcal{L}_{\Sigma_\infty}$ freie Variablen enthält oder nicht. Daraus folgt, dass die Sprache der Aussagen $\mathcal{A}_{\Sigma_\infty}$ entscheidbar ist, da Aussagen per Definition Formeln ohne freie Variablen sind. $\square$

Proposition 5.5. *Die Sprachen $\mathcal{L}_{\text{arithmetisch}}$ und $\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}$ sind entscheidbar.*

Beweis. Aus der Entscheidbarkeit von $\mathcal{L}_{\Sigma_\infty}$ und $\mathcal{A}_{\Sigma_\infty}$ folgt unmittelbar die Entscheidbarkeit der Sprachen $\mathcal{L}_{\text{arithmetisch}} = \mathcal{L}_{\Sigma_\infty} \cap {\Sigma_{\text{arithmetisch}}}^*$ und $\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}} = \mathcal{A}_{\Sigma_\infty} \cap {\Sigma_{\text{arithmetisch}}}^*$, da wir hierfür lediglich die Signatur auf $\Sigma_{\text{arithmetisch}}$ einschränken. $\square$

Nun können wir einsehen, dass unser Sequenzenkalkül auf folgende Weise rekursiv aufzählbar ist.

Lemma 5.6. *Die Menge aller im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ herleitbaren Sequenzen H ist rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Es ist

$$H = \{\Gamma \implies \Delta : \Gamma \implies \Delta \text{ hat eine Herleitung in } \mathfrak{S}\}$$

die zu betrachtende Menge. Wir können mithilfe eines geeigneten nichtdeterministischen Algorithmus auf einer Turingmaschine rekursiv aufzählen, ob eine gegebene beliebige Sequenz $\Gamma \implies \Delta$ herleitbar ist.

Hierfür wendet die Turingmaschine die Schlussregeln von $\mathfrak{S}$ beliebig an und akzeptiert, falls die Sequenz $\Gamma \implies \Delta$ erreicht wird. Dies geschieht genau dann in mindestens einem endlichen Berechnungspfad, wenn die Sequenz tatsächlich auch herleitbar ist.

Es gibt zwar endlich viele Schlussregeln, jedoch gibt es für die Auswahl der jeweils beteiligten Aussagen/Mengen/Terme eventuell unendlich viele Möglichkeiten. Das Verfahren ist dennoch gültig, da die Turingmaschine

- für ($\mathfrak{S}_0$) nichtdeterministisch eine Aussage A wählen kann, da nach Proposition 5.5 die Menge aller arithmetischen Aussagen entscheidbar ist,
- für ($\mathfrak{S}_1$) nichtdeterministisch endliche Obermengen $\Gamma' \supseteq \Gamma, \Delta' \supseteq \Delta$ von Aussagen analog zum obigen Punkt wählen kann,
- für ($\mathfrak{S}_{2a}$) bis ($\mathfrak{S}_{10}$) jeweils entsprechend Aussagen $A, B, s \equiv s, F(c), F(s), F(t), \neg A$ aus den bereits gegebenen endlichen Mengen nichtdeterministisch wählen kann und
- für ($\mathfrak{S}_{8a}$) und ($\mathfrak{S}_{8b}$) nichtdeterministisch einen Term s ohne freie Variablen wählen kann. Dies ist ebenfalls effektiv möglich, da die Menge aller solcher Terme auch entscheidbar ist (sieht man analog zum Beweis von Proposition 5.5 ein).

Bei den Regeln ($\mathfrak{S}_4$) und ($\mathfrak{S}_{10}$) fällt auf, dass für die Herleitung einer weiteren Sequenz, jeweils zwei Sequenzen benötigt werden. Dies kann umgangen werden, indem die Turingmaschine bereits erzeugte herleitbare Sequenzen speichert und gegenbenenfalls nichtdeterministisch wiederverwendet. Somit wird also durch die Turingmaschine jede herleitbare Sequenz erzeugt und kann gegen die gegebene Sequenz $\Gamma \implies \Delta$ geprüft werden. Da nun insbesondere per Definition Γ und Δ endliche Mengen von Aussagen sind, ist insgesamt H rekursiv aufzählbar. □

Übertragen lässt sich dies auf axiomatisierbare Theorien, da diese per Definition aus syntaktischen Ableitungen in dem Sequzenzenkalkül bestehen.

Korollar 5.7. *Sei T eine axiomatisierbare Theorie. Dann ist T rekursiv aufzählbar.*

Beweis. Sei H die Menge aller im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ herleitbaren Sequenzen. Da T axiomatisierbar ist, gibt es eine entscheidbare Menge Γ, die T deduktiv erzeugt, also

$$T = \{A : \Gamma \vdash A\}\,.$$

Da Γ insbesondere rekursiv aufzählbar ist, gibt es eine effektive Aufzählung $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ der Aussagen in Γ. Nun können wir mithilfe eines geeigneten nichtdeterministischen Algorithmus auf einer Turingmaschine rekursiv aufzählen, ob eine gegebene beliebige Aussage A aus Γ ableitbar ist.

Dafür wählt die Turingmaschine nichtdeterministisch eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und betrachtet die endliche Menge

$$\Gamma_k := \bigcup_{i=1}^{k} \{G_i\}\,.$$

Hierfür wird nun überprüft, ob die Sequenz $\Gamma_k \implies \{A\}$ in $\mathfrak{S}$ herleitbar ist. Wenn dies der Fall ist, akzeptiert die Turingmaschine, da dann $\Gamma \vdash A$ gilt.

Dieses Verfahren ist gültig, da einerseits die Überprüfung bei Herleitbarkeit der Sequenz $\Gamma_k \implies \{A\}$ terminiert, da H gemäß Lemma 5.6 rekursiv aufzählbar ist. Andererseits gilt $\Gamma \vdash A$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ gibt, sodass die Sequenz $\Gamma_0 \implies \{A\}$ eine Herleitung in $\mathfrak{S}$ hat. In diesem Fall gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_k$. Nach der Schlussregel $(\mathfrak{S}_1)$ hat somit auch die Sequenz $\Gamma_k \implies \{A\}$ eine Herleitung. □

Ist zudem die Theorie vollständig, so ist diese auch entscheidbar.

Korollar 5.8. *Sei T eine vollständige und axiomatisierbare Theorie. Dann ist T entscheidbar.*

Beweis. Da T axiomatisierbar ist, gibt es eine entscheidbare Menge Γ, sodass $T = \{A : \Gamma \vdash A\}$. In Korollar 5.7 sehen wir, dass T rekursiv aufzählbar ist. Um die Entscheidbarkeit zu zeigen, genügt es also nach Proposition 2.5 zu zeigen, dass das Komplement $T^c = {\Sigma_{\text{arithmetisch}}}^* \setminus T$ auch rekursiv aufzählbar ist.

Wir können das Komplement auf folgende Weise umschreiben:

$$\begin{aligned} T^c &= {\Sigma_{\text{arithmetisch}}}^* \setminus T \\ &= (\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}} \cup {\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}}^c) \setminus T \\ &= (\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}} \setminus T) \cup ({\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}}^c \setminus T) \end{aligned}$$

Die rechte Menge ${\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}}^c \setminus T$ ist bereits ${\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}}^c$, da T sowieso nur aus syntaktisch korrekten Aussagen besteht. Die linke Menge $\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}} \setminus T$ besteht aus genau allen

Aussagen, die nicht in T enthalten sind. Da T nun auch noch vollständig und konsistent ist, sind dies genau alle Aussagen, deren Negation in T enthalten ist. Also folgt

$$T^c = \{A : \neg A \in T\} \cup \mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}{}^c .$$

Weiterhin ist $\{A : \neg A \in T\}$ rekursiv aufzählbar, da das Entfernen eines führenden Negationssymbols $\neg A \mapsto A$ offenbar berechenbar ist und T wiederum rekursiv aufzählbar ist. Außerdem ist $\mathcal{A}_{\text{arithmetisch}}{}^c$ als Komplement einer entscheidbaren Sprache nach Proposition 2.5 rekursiv aufzählbar.

Insgesamt ist also T^c als Vereinigung rekursiv aufzählbarer Sprachen wieder rekursiv aufzählbar und damit ist folglich T entscheidbar. □

5.2 Gödelnummern

Als Nächstes formalisieren wir Formeln und Aussagen innerhalb der arithmetischen Sprache, um Formeln und Aussagen über diese aufstellen zu können. Hierfür müssen wir Formeln auf irgendeiner Weise innerhalb anderer Formeln referenzieren können. Unser Vorgehen wird es sein, jeder Formel eine eindeutige natürliche Zahl zuzuordnen, denn dann können wir das zugehörige Numeral innerhalb weiterer Formeln weiterverwenden.

Die Menge von Symbolen $\Sigma_{\text{arithmetisch}}$ für unsere Formeln ist abzählbar und damit ist, nach Proposition 2.8, auch die Menge aller möglichen Wörter $\Sigma_{\text{arithmetisch}}{}^*$ abzählbar. Damit ist also eine Nummerierung der Formeln prinzipiell möglich. Nun gibt es viele Möglichkeiten für eine solche Nummerierung, wir werden uns jedoch eine explizit wählen, von der wir außerdem sehen, dass diese berechenbar ist. Hierfür gehen wir ähnlich zu [BBJ07, Abschnitt 15.2] vor. Außerdem betrachten wir weiterhin Formeln aus $\mathcal{L}_{\text{arithmetisch}}$ als Wörter über dem endlichen Alphabet Σ_0, sodass die Berechenbarkeit (analog zur Entscheidbarkeit) in diesem Zusammenhang wohldefiniert ist.

1. Schritt: Zunächst ordnen wir jedem Symbol unseres endlichen Alphabets eine eindeutige natürliche Zahl zu. Den Symbolen aus

$$\Sigma_0 = \{\neg, \wedge, \forall, \equiv, v, R, f, \uparrow, \downarrow\}$$

geben wir entsprechend die Zahl 1 für $\neg$, 2 für $\wedge$ usw. bis 9 für $\downarrow$.

2. Schritt: Sei nun $F \in \Sigma_0^*$ ein Wort und F_i die zugeordnete Zahl aus Schritt 1 für das Symbol an i-ter Stelle. Dann können wir F die Zahl

$$\ulcorner F \urcorner := \prod_{i=1}^{|F|} p_i^{F_i}$$

zuordnen, wobei p_i die i-te Primzahl ist.

Diese Nummerierung der Formeln nennt man Gödelisierung und die entstehenden Nummern nennt man Gödelnummern.

Definition 5.9 (Gödelnummer, Gödelnumeral)**.** Sei $F \in \Sigma_0^*$ ein Wort. Dann heißt die in Schritt 2 zugeordnete natürliche Zahl $\ulcorner F \urcorner$ die **Gödelnummer** von F. Das zugehörige Numeral $\underline{\ulcorner F \urcorner}$ nennen wir **Gödelnumeral**.

Beispiel 5.10. Wir betrachten die Aussage der arithmetischen Sprache

$$\forall x(\underline{0} < x')\,,$$

die besagt, dass alle Nachfolgerzahlen größer sind als 0. Setzen wir die eigentlichen Relations- und Funktionssymbole ein, erhalten wir

$$\forall x(R_0^2(f_0^0, f_0^1(x)))\,.$$

Das tatsächliche Wort ohne vereinfachende Notation lautet dann

$$\forall v_0 R_0^2 f_0^0 f_0^1 v_0\,.$$

Im endlichen Alphabet entspricht dies dem Wort

$$\forall v R{\uparrow\uparrow}\, f f{\uparrow}\, v\,.$$

Die Symbole in diesem Wort haben die Zahlen $3, 5, 6, 8, 8, 7, 7, 8, 5$ in Schritt 1 zugeordnet bekommen. Die Gödelnummer lautet dementsprechend:

$$\ulcorner \forall x(\underline{0} < x') \urcorner = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 7^8 \cdot 11^8 \cdot 13^7 \cdot 17^7 \cdot 19^8 \cdot 23^5 \approx 1.06 \cdot 10^{56}$$

Die Zahl aus dem obigen Beispiel 5.10 ist relativ groß, was ziemlich unpraktisch zu handhaben scheint. Jedoch benötigen wir die Gödelisierung nur als theoretisches Hilfsmittel und machen uns nicht viele Gedanken um konkrete Gödelnummern. Etwa genügt es uns, zu wissen, dass die Nummerierung und die Rückumwandlung in Wörter, zwar nicht effizient, aber auf folgende Weisen effektiv berechenbar und entscheidbar sind:

Proposition 5.11. *(i) Die Abbildung* $\ulcorner \cdot \urcorner : \Sigma_0^* \to \mathbb{N}, F \mapsto \ulcorner F \urcorner$ *ist injektiv.*

(ii) $\ulcorner \cdot \urcorner$ *und* $\ulcorner \cdot \urcorner^{-1} : \ulcorner \Sigma_0^* \urcorner \to \Sigma_0^*$ *sind berechenbar.*

Beweis. (i) Die Abbildung ist injektiv, da die Primfaktorzerlegung eindeutig ist und die Position der Symbole im Wort F durch die $<$-Ordnung auf den Primzahlen erhalten bleibt. Man kann also eindeutig das Wort F aus der Gödelnummer $\ulcorner F \urcorner$ rekonstruieren.

(ii) Die Berechenbarkeit von $\ulcorner\cdot\urcorner$ folgt aus der Entscheidbarkeit der Menge der Primzahlen, sowie der Berechenbarkeit der Multiplikation von natürlichen Zahlen. Da die Primfaktorzerlegung berechenbar ist, ist die Umkehrabbildung ebenfalls berechenbar.

□

Proposition 5.12. *Die Menge $\ulcorner\Sigma_0^*\urcorner$ der Gödelnummern aller Wörter ist entscheidbar.*

Beweis. Sei p_i die i-te Primzahl für $i \in \mathbb{N}$. Aus der Konstruktion der Gödelnummern folgt $\ulcorner\Sigma_0^*\urcorner = \{\prod_{i=1}^k p_i^{e_i} : k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq e_i \leq 9$ für $i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ lässt sich nun effektiv auf folgende Weise entscheiden, ob $n \in \ulcorner\Sigma_0^*\urcorner$: Zunächst berechnet man effektiv die Primfaktorzerlegung $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$. Dann prüft man, ob für die Exponenten $1 \leq e_i \leq 9$ gilt, denn genau dann ist $n \in \ulcorner\Sigma_0^*\urcorner$. Da diese Überprüfung entscheidbar ist, folgt, dass $\ulcorner\Sigma_0^*\urcorner$ entscheidbar ist. □

5.3 Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz

In diesem Unterabschnitt formulieren und beweisen wir den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Hierfür orientieren wir uns an den Resultaten und Beweisen aus [BBJ07, Abschnitt 17.1].

Bevor wir in die Beweise einsteigen, wollen wir hier ein Aufwärmbeispiel vorführen, das eine ähnliche Argumentation verfolgt, um das Vorgehen bei den eigentlichen Beweisen etwas besser nachvollziehen zu können.

Beispiel 5.13 (Aufwärmbeispiel)**.** Zunächst sei G als folgende Aussage definiert:

$$G \text{ ist nicht beweisbar.} \tag{G}$$

Hier referenziert G sich also selbst. Jetzt analysieren wir die Beweisbarkeit der Aussage G. Angenommen G wäre beweisbar. Dann würde die Aussage

$$G \text{ ist beweisbar.} \tag{$\neg G$}$$

wahr sein. Insbesondere würde daraus folgen, dass G wahr ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\neg G$, da diese gerade die Negation von G bildet.
Also folgt hieraus (falls wir annehmen, dass es keine Widersprüche gibt), dass G nicht beweisbar ist. Insbesondere folgt daraus, dass G wahr ist. Insgesamt ist also G eine Aussage, die zugleich wahr, aber unbeweisbar ist.

Wichtig zu beachten ist, dass dieses Beispiel recht informell gehalten ist. Einige Fragen müssen im Folgenden geklärt werden: Zunächst ist es nicht trivial, ob eine selbstreferenziernde Aussage wie G existiert. Weiterhin ist zu klären, wie der Begriff der Beweisbarkeit prädikatenlogisch auszudrücken ist. Außerdem ist der Wahrheitsbegriff außerhalb einer Interpretation nicht definiert, weswegen wir Beweisbarkeit nicht so leicht mit Wahrheit in Verbindung bringen können, wie im Beispiel.

Wir beginnen mit dem Diagonalisierungslemma, welches uns für eine beliebige Formel $B(y)$ mit einer freien Variable eine Aussage G garantiert, die „über sich selbst sagt“, dass diese, genauer die Gödelnummer von G, die Formel B erfüllt.

Lemma 5.14 (Diagonalisierungslemma)**.** *Sei $B(y)$ eine Formel und T eine Erweiterung von* $\mathbf{Q}$. *Dann gibt es eine Aussage G, sodass*

$$\vdash_T G \leftrightarrow B(\underline{\ulcorner G \urcorner})$$

gilt.

Bevor wir den Beweis für das Diagonalisierungslemma anführen, führen wir den Begriff einer Diagonalisierung ein, der im Beweis hilfreich sein wird.

Definition 5.15 (Diagonalisierung)**.** Sei F eine Formel. Dann ist die **Diagonalisierung** von A die Formel

$$\exists x(x \equiv \underline{\ulcorner F \urcorner} \wedge F)$$

Bemerkung 5.16. Falls $F = A$ eine Aussage ist, so ist die Diagonalisierung logisch äquivalent zu A, da der Aussagenteil $\exists x x \equiv \underline{\ulcorner A \urcorner}$ in jeder Interpretation gilt. Interessant für uns wird es, wenn $F = F(x)$ eine Formel mit freier Variable x ist, denn dann ist die Diagonalisierung $\exists x(x \equiv \ulcorner F \urcorner \wedge F(x))$ logisch äquivalent zu $F(\ulcorner F \urcorner)$.

Wir betrachten nun die Abbildung diag, die der Gödelnummer einer Formel F die Gödelnummer der Diagonalisierung von F zuordnet.

Proposition 5.17. *Sei* $\operatorname{diag} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *die Abbildung mit*

$$\operatorname{diag}(\ulcorner F \urcorner) = \ulcorner \exists x(x \equiv \underline{\ulcorner F \urcorner} \wedge F)\urcorner$$

für jedes Wort $F \in \Sigma_0^*$ und $\operatorname{diag}(n) = 0$ *für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \ulcorner \Sigma_0^* \urcorner$. Dann ist* diag *berechenbar.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Proposition 5.12 lässt sich auf effektiver Weise entscheiden, ob $n \in \ulcorner \Sigma_0^* \urcorner$. Ist dies nicht der Fall, so soll 0 ausgegeben werden. Andernfalls gibt es ein Wort $F \in \Sigma_0^*$, sodass $n = \ulcorner F \urcorner$.

Gegeben der Gödelnummer $\ulcorner F \urcorner$ lässt sich nun gemäß Proposition 5.11 auf berechenbare Weise das zugehörige Gödelnumeral $\underline{\ulcorner F \urcorner}$ (gemäß Proposition 3.34) und das Wort F erhalten.

Die Diagonalisierung von F lautet ohne abkürzende Notation

$$\neg \forall x \neg \wedge \equiv x \; \underline{\ulcorner F \urcorner} \; F$$

und ist somit die Konkatenation der Symbole $\neg, \forall, x, \wedge, \equiv$ mit den Wörtern $\underline{\ulcorner F \urcorner}$ und F. Die Abbildung, die einer Gödelnummer die zugehörige Diagonalisierung zuordnet, ist also auch berechenbar.

Schließlich ist die Bildung der Gödelnummer der daraus entstanden Diagonalisierung auch berechenbar, ebenfalls gemäß Proposition 5.11, woraus dann insgesamt folgt, dass diag berechenbar ist. □

Beweis vom Diagonalisierungslemma 5.14. Wir sehen in Proposition 5.17, dass die Abbildung diag berechenbar ist. Gemäß Satz 4.39 ist diag in **Q** repräsentierbar. Also gibt es eine Formel $\mathrm{Diag}(x, y)$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathrm{diag}(m) = n$

$$\vdash_{\mathbf{Q}} \forall y(\mathrm{Diag}(\underline{m}, y) \leftrightarrow y \equiv \underline{n})$$

gilt. Da **Q** in T enthalten ist, ist diag auch in T repräsentierbar, da

$$\vdash_T \forall y(\mathrm{Diag}(\underline{m}, y) \leftrightarrow y \equiv \underline{n})$$

gilt.

Sei nun konkret die Formel $F(x) := \exists y(\mathrm{Diag}(x, y) \wedge B(y))$. Dann definieren wir unsere gesuchte Aussage G explizit als Diagonalisierung von F:

$$G := \exists x(x \equiv \underline{\ulcorner F \urcorner} \wedge \exists y(\mathrm{Diag}(x, y) \wedge B(y)))$$

Nun ist G logisch äquivalent zu $\exists x(x \equiv \underline{\ulcorner F \urcorner} \wedge \exists y(\mathrm{Diag}(\underline{\ulcorner F \urcorner}, y) \wedge B(y)))$ und damit auch logisch äquivalent zu $\exists y(\mathrm{Diag}(\underline{\ulcorner F \urcorner}, y) \wedge B(y))$.

Aus der logischen Äquivalenz erhalten wir nach Proposition 4.5 die Allgemeingültigkeit der Aussage

$$G \leftrightarrow \exists y(\mathrm{Diag}(\underline{\ulcorner F \urcorner}, y) \wedge B(y))\,.$$

Insbesondere folgt diese Aussage also auch aus der Theorie T. Da nach Vollständigkeitssatz 4.24 syntaktische Ableitung aus semantischer Folgerung folgt, erhalten wir

$$\vdash_T G \leftrightarrow \exists y(\mathrm{Diag}(\underline{\ulcorner F \urcorner}, y) \wedge B(y))\,. \tag{8}$$

Da wiederum G per Definition die Diagonalisierung von F ist, gilt $\mathrm{diag}(\ulcorner F \urcorner) = \ulcorner G \urcorner$, weshalb wir durch die Repräsentation in T

$$\vdash_T \forall y(\mathrm{Diag}(\underline{\ulcorner F \urcorner}, y) \leftrightarrow y \equiv \underline{\ulcorner G \urcorner}) \tag{9}$$

erhalten.

Setzen wir nun diese Äquivalenz aus (9) in (8) ein, erhalten wir

$$\vdash_T G \leftrightarrow \exists y(y \equiv \underline{\ulcorner G \urcorner} \wedge B(y)) \tag{10}$$

Schließlich nutzen wir, dass $\exists y(y \equiv \underline{\ulcorner G \urcorner} \wedge B(y))$ logisch äquivalent zur Aussage $B(\underline{\ulcorner G \urcorner})$ ist und damit die Äquivalenz auch aus T folgt, und erhalten durch Einsetzen in (10) die gewünschte Äquivalenz in T

$$\vdash_T G \leftrightarrow B(\underline{\ulcorner G \urcorner})\,.$$

$\square$

Mithilfe des Diagonalisierungslemmas können wir bereits folgendes Lemma zeigen, das im Beweis einer zum obigen Aufwärmbeispiel 5.13 ähnlichen Argumentation folgt.

Lemma 5.18. *Sei T eine konsistente Erweiterung von $\mathbf{Q}$. Dann ist die Menge $\ulcorner T \urcorner$ aller Gödelnummern der Aussagen aus T nicht definierbar in T.*

Beweis. Sei $\ulcorner T \urcorner = \{\ulcorner A \urcorner : A \in T\}$ die Menge der Gödelnummern der Aussagen aus T. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass es eine Formel $\theta(y)$ gibt, die $\ulcorner T \urcorner$ in T definiert. Also, dass nach Definition 4.38 für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Wenn } n \in \ulcorner T \urcorner, \text{ dann } \vdash_T \theta(\underline{n}) \text{ und} \tag{11}$$

$$\text{wenn } n \notin \ulcorner T \urcorner, \text{ dann } \vdash_T \neg\theta(\underline{n}) \tag{12}$$

Wenden wir das Diagonalisierungslemma 5.14 auf die Formel $\neg\theta(y)$ an, erhalten wir eine Aussage G, für die

$$\vdash_T G \leftrightarrow \neg\theta(\underline{\ulcorner G \urcorner}) \tag{13}$$

gilt.

Wir führen eine Fallunterscheidung durch, ob G in T enthalten ist:

1. Fall: Angenommen G ist keine Aussage aus T, also

$$\nvdash_T G\,. \tag{14}$$

Dann ist die Gödelnummer $\ulcorner G \urcorner$ von G nicht in $\ulcorner T \urcorner$ enthalten. Mit (12) folgt daraus $\vdash_T \neg\theta(\underline{\ulcorner G \urcorner})$. Insbesondere würde mit (13) dann gelten, dass $\vdash_T G$, was zum Widerspruch zu (14) steht.

2. Fall: Angenommen G ist eine Aussage aus T, also

$$\vdash_T G\,. \tag{15}$$

Dann ist die Gödelnummer $\ulcorner G \urcorner$ von G in $\ulcorner T \urcorner$ enthalten. Mit (11) folgt daraus

$$\vdash_T \theta(\underline{\ulcorner G \urcorner}) \tag{16}$$

Aber aus (15) und (13) folgt $\vdash_T \neg\theta(\underline{\ulcorner G \urcorner})$, was zusammen mit (16) zur Folge hat, dass T eine inkonsistente Theorie ist, gemäß Korollar 4.36.

Dies widerspricht unserer Annahme, dass T konsistent ist. Deshalb kann also $\ulcorner T \urcorner$ nicht in T definierbar sein. $\square$

Hieraus erhalten wir den essentiellen Unentscheidbarkeitssatz, der die Unentscheidbarkeit hinreichend mächtiger und konsistenter Theorien liefert. Der Satz ist verwandt mit der Unentscheidbarkeit des Halteproblems von Turing, dessen Beweis ebenfalls auf einem Diagonalargument (vgl. Diagonalisierungslemma 5.14) basiert.

Lemma 5.19 (Essentieller Unentscheidbarkeitssatz)**.** *Sei T eine konsistente Erweiterung von $\mathbf{Q}$. Dann ist T unentscheidbar.*

Beweis. Nach Lemma 5.18, ist die Menge $\ulcorner T \urcorner$ nicht definierbar in T. Da weiter gemäß Satz 4.39 alle entscheidbaren Mengen in $\mathbf{Q}$ also insbesondere auch in T definierbar sind, kann $\ulcorner T \urcorner$ nicht entscheidbar sein. Da die Transformation von Gödelnummern aus $\ulcorner T \urcorner$ in die Sprache der entsprechenden Aussagen aus T durch $\ulcorner \cdot \urcorner^{-1}$ gemäß Proposition 5.11 berechenbar ist, folgt, dass auch T nicht entscheidbar ist. $\square$

Korollar 5.20. *Die Theorie $\mathbf{Q}$ ist unentscheidbar.*

Beweis. $\mathbf{Q}$ ist eine konsistente Theorie, da sie erfüllbar ist. Aus Lemma 5.19 folgt die Unentscheidbarkeit. $\square$

Somit sehen wir, dass der Sequenzenkalkül zwar auf gewisse Weise rekursiv aufzählbar ist (siehe Lemma 5.6), aber nicht entscheidbar ist. Genauer sieht man das anhand einer Schlussfolgerung des essentiellen Unentscheidbarkeitssatzes, nämlich des Satzes von Church. Dieser betrachtet die Unentscheidbarkeit der Menge der allgemeingültigen Aussagen.

Bemerkung 5.21. Die Menge der allgemeingültigen Aussagen ist rekursiv aufzählbar. Dies folgt aus Korollar 5.7, da diese Menge gerade eine axiomatisierbare Theorie mit Axiomenmenge $\emptyset$ ist.

Satz 5.22 (Satz von Church)**.** *Die Menge der allgemeingültigen Aussagen ist nicht entscheidbar.*

Beweis. Sei K die Konjunktion der Axiome (Q1) bis (Q10) von $\mathbf{Q}$ und A eine beliebige Aussage. Es gilt $\mathbf{Q} \vDash A$ genau dann, wenn die Aussage $K \to A$ allgemeingültig ist, da genau dann A aus den Axiomen $\{K\}$ semantisch folgt. Die Aussage $K \to A$ entspricht in offizieller Notation dem Wort $\neg \wedge K \neg A$.

Die Abbildung $f : A \mapsto \neg \wedge K \neg A$, die einer Aussage A also die Aussage $K \to A$ zuordnet, ist offenbar berechenbar, da diese nur einer Linkskonkatenation an das Wort A entspricht.

Angenommen die Menge der allgemeingültigen Aussagen wäre entscheidbar. Dann kann man für eine beliebige Aussage A effektiv entscheiden, ob diese in $\mathbf{Q}$ liegt, indem man das Wort $f(A)$ berechnet und prüft, ob das Ergebnis in der Menge der allgemeingültigen Aussagen enthalten ist. Also wäre insbesondere $\mathbf{Q}$ entscheidbar. Dies ist nach Korollar 5.20 ein Widerspruch, da $\mathbf{Q}$ unentscheidbar ist. □

Schließlich folgt ebenfalls aus dem essentiellen Unentscheidbarkeitssatz der erste Unvollständigkeitssatz von Gödel.

Satz 5.23 (Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz)**.** *Es gibt keine konsistente, vollständige und axiomatisierbare Erweiterung von* $\mathbf{Q}$.

Beweis. Sei T vollständig und axiomatisierbar. Dann ist T nach Korollar 5.8 entscheidbar. Mit der Kontraposition von Lemma 5.19 folgt dann, dass T keine konsistente Theorie ist. □

Der Unvollständigkeitssatz zeigt uns, dass jede hinreichend mächtige Theorie, also eine, die $\mathbf{Q}$ enthält und außerdem noch konsistent und axiomatisierbar ist, nicht vollständig sein kann. Also gibt es zwangsweise Aussagen, die aus den Axiomen der Theorie weder bewiesen, noch widerlegt werden können. Das bedeutet auch, dass der Wahrheitsbegriff, der durch die Standardinterpretation $\mathcal{N}$ definiert wird, nicht mit der Beweisbarkeit gleichzusetzen ist.

Aus einer anderen Perspektive betrachtet, zeigt uns der Unvollständigkeitssatz, dass es Modelle von $\mathbf{Q}$ gibt, in denen nicht alle Aussagen wahr sind, die in $\mathcal{N}$ wahr sind. Außerdem ist die Theorie aller Aussagen, die in $\mathcal{N}$ wahr sind, somit auch nicht axiomatisierbar, da sie offenbar $\mathbf{Q}$ enthält, erfüllbar ist und damit auch konsistent ist.

6 Satz von Löwenheim-Skolem

In diesem Abschnitt analysieren wir die Mächtigkeit der Universen von Interpretationen und beschäftigen uns dann genauer mit dem Satz von Löwenheim-Skolem.

Sei dafür in diesem Abschnitt Σ wieder eine beliebige zugrundeliegende Signatur erster Stufe.

Definition 6.1 (Mächtigkeit einer Interpretation)**.** Wenn wir von der Mächtigkeit einer Interpretation $\mathcal{I}$ reden, meinen wir damit die Mächtigkeit ihres Universums $\mathcal{U}_{\mathcal{I}}$. Insbesondere ist eine (un-)endliche bzw. (über-)abzählbare Interpretation eine Interpretation mit (un-)endlichem bzw. (über-)abzählbarem Universum.

Man kann Theorien konstruieren, die nur endliche Modelle besitzen und gleichermaßen kann man Theorien konstruieren, die nur unendliche Modelle besitzen:

Proposition 6.2 ([BBJ07, 12.1])**.**

(i) Es gibt eine Menge von Aussagen Γ, das nur Modelle der Mächtigkeit n besitzt, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gibt eine Menge von Aussagen Γ, das nur unendliche Modelle besitzt.

Beweisskizze. Sei I_n die Aussage

$$\forall x_1 \dots \forall x_{n-1} \exists x_n ((\neg x_n \equiv x_1) \wedge \dots \wedge (\neg x_n \equiv x_{n-1}))$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann kann man zeigen, dass jedes Modell von I_n mindestens n Elemente hat. Weiter sieht man, dass jedes Modell von $J_n := \neg I_{n+1}$ höchstens n Elemente besitzt. Daraus können wir dann folgende Mengen von Aussagen bilden:

(i) Wählt man $\Gamma := \{I_n \wedge J_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so besitzt jedes Modell von Γ genau n Elemente.

(ii) Wählt man $\Gamma := \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, so besitzt jedes Modell von Γ unendlich viele Elemente.

$\square$

Es liegt nahe, sich weiter zu überlegen, ob es ebenfalls möglich wäre, Theorien zu konstruieren, die nur abzählbare bzw. nur überabzählbare Modelle besitzen. Jedoch stellt sich heraus, dass das eine weitere Grenze der Prädikatenlogik erster Stufe darstellt, da das in dieser nicht möglich ist. Dies zeigen wir mithilfe des Satzes von Löwenheim-Skolem. Genau genommen, unterteilen wir die Fragestellung in den aufsteigenden und absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem. Diese besagen, dass für Theorien mit unendlichem Modell beliebig größere und kleinere unendliche Modelle existieren.

6.1 Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem

Zunächst schauen wir uns den aufsteigenden Fall an und folgen dafür dem Beweis aus [EFT18, 6.2.3]. Dieser besagt, dass jede Theorie, die ein unendliches Modell hat, auch ein Modell besitzt, das beliebig groß ist. Die genaue Formulierung sehen wir in Satz 6.6.

Der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem folgt aus dem sogenannten Endlichkeitssatz, den wir zuerst beweisen:

Satz 6.3 (Endlichkeitssatz (Konsistenz))**.** *Sei Γ eine Menge von Aussagen. Dann sind äquivalent:*

(i) Γ ist konsistent.

(ii) Jede endliche Teilmenge von Γ ist konsistent.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii):
Sei Γ konsistent. Per Definition gibt es eine Aussage A, die nicht aus Γ ableitbar ist. Per Definition der Ableitungsbeziehung ist A aus keiner endlichen Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ ableitbar. Also gilt für jede endliche Teilmenge Γ_0, dass nicht jede Aussage, nämlich eben nicht A, aus Γ_0 ableitbar ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Sei Γ inkonsistent. Nach Lemma 4.17 gibt es eine Aussage A, für die $\Gamma \vdash A$ und $\Gamma \vdash \neg A$ gilt. Per Definition der Ableitungsbeziehung gibt es endliche Teilmengen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$, sodass die Sequenzen $\Gamma_1 \implies \{A\}$ und $\Gamma_2 \implies \{\neg A\}$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ herleitbar sind. Bemüht man die Regel $(\mathfrak{S}_1)$, um die Antezedezen auf die endliche Menge $\Gamma_0 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ zu erweitern, so erhält man folgende herleitbaren Sequenzen:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\implies \{A\} \\ \Gamma_0 &\implies \{\neg A\} \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $\Gamma_0 \vdash A$ und $\Gamma_0 \vdash \neg A$. Damit ist also Γ_0 wiederum nach Lemma 4.17 inkonsistent. Insgesamt ist also nicht jede endliche Teilmenge von Γ konsistent, nämlich Γ_0 nicht. $\square$

Korollar 6.4 (Endlichkeitssatz (Erfüllbarkeit))**.** *Sei Γ eine Menge von Aussagen. Dann sind äquivalent:*

(i) Γ ist erfüllbar.

(ii) Jede endliche Teilmenge von Γ ist erfüllbar.

Beweis. Gemäß dem Adäquatheitssatz 4.18 für die Erfüllbarkeit sind der Konsistenz- und Erfüllbarkeitsbegriff äquivalent, weshalb der Endlichkeitssatz direkt aus Satz 6.3 folgt. $\square$

Außerdem benötigen wir noch folgendes ähnliche Lemma, das auch unendliche Teilmengen miteinbezieht:

Lemma 6.5. *Sei Γ eine erfüllbare Menge von Aussagen. Dann ist jede Teilmenge von Γ erfüllbar.*

Beweis. Per Definition der Erfüllbarkeit, gibt es eine Interpretation $\mathcal{I}$, die Modell von Γ ist. Also sind alle Aussagen aus Γ in $\mathcal{I}$ wahr. Insbesondere sind alle Aussagen aus beliebigen Teilmengen von Γ wahr. Somit ist $\mathcal{I}$ Modell jeder Teilmenge von Γ. Also sind alle Teilmengen von Γ erfüllbar. □

Satz 6.6 (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem)**.** *Sei Γ eine Menge von Aussagen, die ein unendliches Modell hat und A eine beliebige Menge. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M}$ von Γ mit $|A| \leq |\mathcal{U}_\mathcal{M}|$.*

Beweis. Sei c_a für jedes $a \in A$ ein neues eindeutiges Symbol, für das also $c_a \notin \Sigma$ und $c_a \neq c_b$ für alle $a, b \in A, a \neq b$ gilt. Sei damit $\Sigma' := \Sigma \cup \{c_a : a \in A\}$ eine erweiterte Signatur erster Stufe, wobei c_a für jedes $a \in A$ ein Konstantensymbol in Σ' sei.

Zunächst zeigen wir, dass die Menge von Aussagen

$$\Delta := \Gamma \cup \{\neg c_a \equiv c_b : a, b \in A, a \neq b\}$$

erfüllbar ist. Sei dafür $\Delta_0 \subseteq \Delta$ eine endliche Teilmenge. Diese enthält nur endlich viele Aussagen der Form $\neg c_a \equiv c_b$. Daher gibt es endlich viele verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in A$ für ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\Delta_0 \subseteq \underbrace{\Gamma \cup \{\neg c_{a_i} \equiv c_{a_j} : i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\}}_{=:\Gamma'}$$

gilt. Nach Vorraussetzung gibt es eine Interpretation $\mathcal{I}$ der Sprache $\mathcal{L}_\Sigma$ mit unendlichem Universum, das Modell von Γ ist.

Wir können uns wegen der Unendlichkeit paarweise verschiedene Elemente $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ wählen. Diese nutzen wir als Denotation für die Konstantensymbole $c_{a_1} \ldots, c_{a_n}$: Sei also $\mathcal{J}$ die Interpretation der Sprache $\mathcal{L}_{\Sigma'}$ mit dem gleichen Universum $\mathcal{U}_\mathcal{J} = \mathcal{U}_\mathcal{I}$ und den gleichen Denotationen von $\mathcal{I}$, sowie den weiteren Denotationen

$$(c_{a_i})^\mathcal{J} := u_i$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Die Aussagen aus Γ bleiben in $\mathcal{J}$ wahr. Die in Γ' hinzugekommenen Aussagen der Form $\neg c_{a_i} \equiv c_{a_j}$, für $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$, sind in $\mathcal{J}$ auch wahr, da die Denotationen dieser Konstantensymbole paarweise verschieden sind. Also hat Γ' ein Modell $\mathcal{J}$ und ist somit erfüllbar.

Daraus folgt, dass Δ_0 als Teilmenge von Γ' auch erfüllbar ist, gemäß Lemma 6.5.

Mithilfe des Endlichkeitssatzes aus Korollar 6.4 erhalten wir aus der Erfüllbarkeit jeder endlichen Teilmenge Δ_0 die Erfüllbarkeit der Menge Δ.

In anderen Worten, gibt es eine Interpretation $\mathcal{M}$, die Modell von Δ ist. Für $a, b \in A$ mit $a \neq b$ ist die Aussage $\neg c_a \equiv c_b$ in $\mathcal{M}$ wahr. Also sind die Denotationen $(c_a)^{\mathcal{M}}$ und $(c_b)^{\mathcal{M}}$ verschiedene Elemente aus $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$. Somit ist die Abbildung $A \hookrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{M}}, a \mapsto (c_a)^{\mathcal{M}}$ injektiv. Insgesamt gilt also für die Mächtigkeiten $|A| \leq |\mathcal{U}_{\mathcal{M}}|$. $\square$

Bemerkung 6.7. Insbesondere folgt aus dem Satz, dass jede Theorie, die ein abzählbares Modell hat, auch ein überabzählbares Modell $\mathcal{M}$ besitzt. Hierfür wählt man in Satz 6.6 beispielsweise $A := \mathbb{R}$ und erhält $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{U}_{\mathcal{M}}|$.

Beispiel 6.8. Betrachten wir beispielsweise die Theorie der minimalen Arithmetik $\mathbf{Q}$. Von dieser wissen wir, dass sie ein unendliches Modell hat, nämlich die Standardinterpretation $\mathcal{N}$ mit Universum $\mathbb{N}_0$. Damit garantiert uns der Satz die Existenz eines überabzählbaren Modells von $\mathbf{Q}$.

6.2 Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem

Nun betrachten wir in diesem Unterabschnitt den absteigenden Fall des Satzes von Löwenheim-Skolems und folgen hierfür [LK15, Abschnitt 3.4] sowie [Rot95, Abschnitte 8.3 und 8.4]. Aus diesem Satz folgt, dass jede Theorie über einer abzählbaren Signatur mit einem möglicherweise überabzählbaren Modell auch ein Modell besitzt, welches höchstens abzählbar ist. Tatsächlich ist der Satz, den wir in 6.14 genauer formulieren, ein stärkeres Resultat, nämlich, dass es sogar ein höchstens abzählbares Modell gibt, das eine sogenannte elementare Unterinterpretation des Ausgangsmodells ist.

Definition 6.9 (Unterinterpretation)**.** Seien $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ Interpretationen der Sprache $\mathcal{A}_\Sigma$. Wir sagen $\mathcal{I}$ ist eine **Unterinterpretation** von $\mathcal{J}$, wenn alle der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathcal{U}_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{U}_\mathcal{J}$.

(ii) $c^\mathcal{I} = c^\mathcal{J}$ für jedes Konstantensymbol $c \in \mathcal{F}_0$.

(iii) $f^\mathcal{I} = f^\mathcal{J}|_{{\mathcal{U}_\mathcal{I}}^k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes Relationssymbol $f \in \mathcal{F}_k$.

(iv) $R^\mathcal{I} = R^\mathcal{J} \cap {\mathcal{U}_\mathcal{I}}^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes Relationssymbol $R \in \mathcal{R}_k$.

Bemerkung 6.10. Eine Unterinterpretation einer Interpretation $\mathcal{J}$ ist also allein durch ihr Universum eindeutig bestimmt. Dieses muss eine Teilmenge von $\mathcal{U}_\mathcal{J}$ sein und alle Denotationen der Konstantensymbole enthalten. Außerdem sollte es abgeschlossen unter den Denotationen der weiteren Funktionssymbole sein. Das heißt, dass $f^\mathcal{J}({\mathcal{U}_\mathcal{I}}^k) \subseteq \mathcal{U}_\mathcal{I}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle Funktionssymbole $f \in \mathcal{F}_k$ gelten soll.

Von größerer Bedeutung sind speziell elementare Unterinterpretationen, also jene, die folgendermaßen Formeln gleichwertig interpretieren:

Definition 6.11 (elementare Unterinterpretation)**.** Eine Unterinterpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{J}$ heißt **elementare Unterinterpretation**, wenn für alle Formeln $F \in \mathcal{L}_\Sigma$ und alle Variablenbelegungen s in $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} \vDash F[s] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{J} \vDash F[s]$$

gilt.

Proposition 6.12. *Sei $\mathcal{I}$ eine elementare Unterinterpretation von $\mathcal{J}$. Dann ist jede Aussage genau dann in $\mathcal{I}$ wahr, wenn sie in $\mathcal{J}$ wahr ist.*

Beweis. Aus Korollar 3.24 wissen wir, dass der Wahrheitswert nicht von der Variablenbelegung abhängt, weshalb wir die Aussage der Proposition direkt aus der Definition gewinnen. $\square$

Es stellt sich heraus, dass es aufgrund der Definition des Wahrheitswertes in Definition 3.21 genügt, Existenz-Formeln und Elemente im Universum der Unterinterpretation zu betrachten, um zu prüfen, ob eine Unterinterpretation elementar ist.

Lemma 6.13 (Tarski-Vaught-Test)**.** *Sei $\mathcal{I}$ eine Unterinterpretation von $\mathcal{J}$, sodass es für alle Formeln $F \in \mathcal{L}_\Sigma$ und alle Variablenbelegungen s in $\mathcal{I}$ mit*

$$\mathcal{J} \vDash \exists x F[s]$$

ein $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ gibt, sodass

$$\mathcal{J} \vDash F[s_{x \mapsto u}]$$

gilt. Dann ist $\mathcal{I}$ eine elementare Unterinterpretation von $\mathcal{J}$.

Grob erklärt, ist die hinreichende Bedingung für die Elementarität, dass man für jede wahre Existenz-Formel in $\mathcal{J}$ mit s ein Element im Universum der Unterinterpretation $\mathcal{I}$ findet, die die Formel ohne voranstehenden Existenzquantor erfüllt. Andernfalls wäre es möglich, dass die erfüllenden Elemente aus $\mathcal{J}$ gerade in $\mathcal{U}_\mathcal{J} \setminus \mathcal{U}_\mathcal{I}$ liegen und somit $\mathcal{I}$ nicht elementar ist.

Beweis von Lemma 6.13. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau einer Formel F, dass $\mathcal{I} \vDash F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{J} \vDash F[s]$, für alle Variablenbelegung s in $\mathcal{I}$ gilt.

Sei dafür F eine Formel, $k \in \mathbb{N}$, $R \in \mathcal{R}_k$ ein Relationssymbol, $t_1, \ldots, t_k$ Terme und x eine Variable. Weiterhin seien für die Induktionshypothese G und H Formeln, sodass $\mathcal{I} \vDash G[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{J} \vDash G[s]$ gilt für jede Variablenbelegung s in $\mathcal{I}$ und analog für H.

Sei nun s eine Variablenbelegung in $\mathcal{I}$.

(i) Gilt $F = t_1 \equiv t_2$, so gilt $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $t_1^{\mathcal{I},s} = t_2^{\mathcal{I},s}$. Da die Denotationen von $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ eingeschränkt auf $\mathcal{U}_\mathcal{I}$ übereinstimmen, gilt weiterhin genau dann auch $t_1^{\mathcal{J},s} = t_2^{\mathcal{J},s}$. Also gilt $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{J} \models F[s]$.

(ii) Gilt $F = R(t_1 \dots t_k)$, so gilt $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $(t_1^{\mathcal{I},s}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s}) \in R^\mathcal{I}$. Es gilt $R^\mathcal{I} = R^\mathcal{J} \cap {\mathcal{U}_\mathcal{I}}^k$ und außerdem gilt bereits $t_i^{\mathcal{J},s} = t_i^{\mathcal{I},s} \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Somit gilt $(t_1^{\mathcal{I},s}, \dots, t_k^{\mathcal{I},s}) \in R^\mathcal{I}$ genau dann, wenn $(t_1^{\mathcal{J},s}, \dots, t_k^{\mathcal{J},s}) \in R^\mathcal{J}$. Also gilt auch hier $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{J} \models F[s]$.

(iii) Gilt $F = \neg G$, so gilt $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \not\models G[s]$. Nach Induktionshypothese ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathcal{J} \not\models G[s]$ gilt. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass $\mathcal{J} \models F[s]$ gilt. Insgesamt erhalten wir also, dass $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{J} \models F[s]$.

(iv) Gilt $F = G \wedge H$, so gilt $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models G[s]$ und $\mathcal{I} \models H[s]$. Nach Induktionshypothese ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathcal{J} \models G[s]$ und $\mathcal{J} \models H[s]$ gelten. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass $\mathcal{J} \models F[s]$ gilt. Insgesamt erhalten wir also auch hier, dass $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann, wenn $\mathcal{J} \models F[s]$.

(v) Den Induktionsschritt mit dem Allquantor, also $F = \forall x G$, ersetzen wir durch den Existenzquantor, also $F = \exists x G$, um den Beweis zu vereinfachen. Dies ist o.B.d.A. möglich, denn Formeln mit Allquantor lassen sich mit dem Existenzquantor so darstellen, dass sich der Wahrheitswert nicht ändert. Genauer lässt sich die Formel $\forall x G$ durch $\neg\exists x \neg G$ darstellen, weil $\mathcal{I}' \models \forall x G[s']$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{I}' \models \neg\exists x \neg G[s']$ für alle Interpretationen $\mathcal{I}'$ und Variablenbelegungen s' in $\mathcal{I}'$.

    Gilt nun also $F = \exists x G$, können wir zeigen, dass $\mathcal{I} \models F[s]$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{J} \models F[s]$. Zunächst gelte $\mathcal{I} \models F[s]$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$, sodass $\mathcal{I} \models G[s_{x \mapsto u}]$ gilt. Da $s_{x \mapsto u}$ eine Variablenbelegung in $\mathcal{I}$ ist, gilt nach Induktionshypothese $\mathcal{J} \models G[s_{x \mapsto u}]$. Daraus folgt bereits, dass $\mathcal{J} \models \exists x G[s]$, also $\mathcal{J} \models F[s]$, da insbesondere $u \in \mathcal{U}_\mathcal{J}$. Andererseits gelte $\mathcal{J} \models F[s]$. Dann existiert nach Voraussetzung des Lemmas ein $u \in \mathcal{U}_\mathcal{I}$, sodass $\mathcal{J} \models G[s_{x \mapsto u}]$. Da $s_{x \mapsto u}$ hier ebenfalls eine Variablenbelegung in $\mathcal{I}$ ist, gilt nach Induktionshypothese $\mathcal{I} \models G[s_{x \mapsto u}]$. Hieraus folgt analog, dass $\mathcal{I} \models \exists x G[s]$, also $\mathcal{I} \models F[s]$.

Da alle Formeln nach diesen Regeln induktiv aufgebaut sind, gilt die Aussage des Lemmas für jede beliebige Formel F. $\square$

Wir konstruieren nun für den absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem eine höchstens abzählbare Unterinterpretation, von der wir dann mithilfe des Tarski-Vaught-Tests aus Lemma 6.13 zeigen, dass diese elementar ist:

Satz 6.14 (Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem). *Sei Σ abzählbar und $\mathcal{J}$ eine Interpretation von $\mathcal{L}_\Sigma$. Dann gibt es eine elementare Unterinterpretation von $\mathcal{J}$, die höchstens abzählbar ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ bereits höchstens abzählbar, so ist $\mathcal{J}$ ihre eigene elementare Unterinterpretation mit höchstens abzählbarem Universum. Daher nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ überabzählbar ist. Wir bemerken weiter, dass die Sprache $\mathcal{L}_{\Sigma}$ nach Proposition 2.8 als Teilmenge von Σ^* abzählbar ist und damit insbesondere nur abzählbar viele Formeln der Form $\exists x F$ für Formeln F enthält. Dies wollen wir ausnutzen, um ein abzählbares Universum U für eine elementare Unterinterpretation $\mathcal{I}$ zu konstruieren, bestehend aus sogenannten Zeugen, also Elementen, die diese Formeln F in $\mathcal{J}$ mit einer Variablenbelegung s wahr machen.

Konstruktion
Sei $\emptyset \neq U_0 \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ eine abzählbare Teilmenge und $u_{\text{const}} \in U_0$ ein belieges Element. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir iterativ Teilmengen U_{n+1} wie folgt: Für jede Formel F und jede Abbildung $s : \mathcal{V} \to U_n$, sodass $\mathcal{J} \vDash \exists x F[s]$ gilt, definieren wir eine Abbildung $s_F : \mathcal{V} \to U_n$: In F kommen nur endlich viele Variablen vor, weshalb das Maximum $k_F = \max\{i : v_i \text{ ist freie Variable von } F\}$ existiert. Nun definiert man

$$s_F(v_i) := \begin{cases} s(v_i), & \text{wenn } i \leq k_F \\ u_{\text{const}}, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Die genaue Konstruktion der Abbildung s_F ist nicht weiter relevant. Wichtig allein sind die Eigenschaften, dass s_F auf den freien Variablen von F mit s übereinstimmt und für fast alle $v \in \mathcal{V}$ konstant ist. Weiter wählen wir nun ein Element $u_{F,s_F} \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$, für das

$$\mathcal{J} \vDash F[s_{x \mapsto u_{F,s_F}}]$$

gilt. Schließlich sei $U_{n+1} := U_n \cup \{u_{F,s_F} : F \text{ Formel und } s : \mathcal{V} \to U_n, \text{ sodass } \mathcal{J} \vDash \exists x F[s]\}$. Als Universum für eine elementare Unterinterpretation kommt die Menge $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ infrage.

Abzählbarkeit
Wir zeigen zunächst per vollständiger Induktion die Abzählbarkeit der Mengen U_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Per Konstruktion ist U_0 abzählbar. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen U_n ist abzählbar, dann gibt es nur abzählbar viele Abbildungen, $s' : \mathcal{V} \to U_n$, die für fast alle $v \in \mathcal{V}$ konstant sind. Da es außerdem, wie schon oben erwähnt, nur abzählbar viele Formeln F gibt, gibt es dementsprechend nur abzählbar viele Elemente u_{F,s_F}. Dies macht damit auch die Menge U_{n+1} abzählbar.

Abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen sind wiederum abzählbar, weshalb somit auch U als solche abzählbar ist.

Elementare Unterinterpretation
Zuletzt bleibt zu zeigen, dass die Menge U ein Universum einer elementaren Unterinterpretation ist. Dafür zeigen wir erst, dass U abgeschlossen ist unter den Denotationen der Funktionssymbole, da dann, wie in Bemerkung 6.10 erwähnt, diese Menge als Universum einer Unterinterpretation zulässig ist. Sei dafür $k \in \mathbb{N}_0, f \in \mathcal{F}_k$ und $u_1, \ldots, u_k \in U$. Es

gibt dann ein n groß genug, sodass $u_1, \dots, u_k \in U_n$. Sei F die Formel $y \equiv f(x_1, \dots, x_k)$ und $s : \mathcal{V} \to U$ eine Abbildung mit $s(x_i) = u_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Es gilt $\mathcal{J} \models \exists y F[s]$, da offenbar $a := f^{\mathcal{J}}(u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ ein Zeuge für F ist. Wir wissen weiter, dass a der einzige Zeuge ist, da die Abbildung $f^{\mathcal{J}}$ als Funktion rechtseindeutig ist. Wegen der Konstruktion von U_{n+1}, folgt, dass $a = u_{F,s_F} \in U_{n+1}$, also insbesondere auch $a \in U$ gilt. Damit ist gezeigt, dass die Unterinterpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{J}$ mit Universum $\mathcal{U}_{\mathcal{I}} := U$ tatsächlich eine Unterinterpretation von $\mathcal{J}$ ist.

Schließlich nutzen wir den Tarski-Vaught-Test aus Lemma 6.13, um zu zeigen, dass die Unterinterpretation $\mathcal{I}$ elementar ist. Sei hierfür F eine Formel und s eine Variablenbelegung in $\mathcal{I}$, sodass $\mathcal{J} \vdash \exists x F[s]$ gilt. Per Konstruktion von s_F gilt, dass s und s_F auf den freien Variablen von F übereinstimmen. Nach Proposition 3.23 gilt dann auch, dass $\mathcal{J} \models \exists x F[s_F]$. Außerdem nimmt s_F insbesondere nur endlich viele Werte an, weshalb man ein $n \in \mathbb{N}_0$ groß genug wählen kann, sodass alle Werte von s_F in U_n enthalten sind. Nach Konstruktion enthält U_{n+1} das Element $u := u_{F,s_F}$, für das $\mathcal{J} \models F[s_{x \mapsto u}]$ gilt. Da insbesondere $u \in U = \mathcal{U}_{\mathcal{I}}$, sind die Voraussetzungen an den Tarski-Vaught-Test erfüllt.

Insgesamt ist also $\mathcal{I}$ eine elementare Unterinterpretation von $\mathcal{J}$ mit abzählbarem Universum. □

Abstrahieren wir die Aussage des Satzes auf die Erfüllbarkeit, erhalten wir das folgende Korollar, das in anderer Literatur, etwa in [EFT18, 6.1.1], auch „Satz von Löwenheim-Skolem“ bezeichnet wird.

Korollar 6.15. *Sei Σ abzählbar und Γ eine erfüllbare Menge von Aussagen. Dann gibt es ein höchstens abzählbares Modell $\mathcal{M}$ von Γ.*

Beweis. Satz 6.14 liefert uns eine elementare Unterinterpretation $\mathcal{M}$ eines Modells von Γ. Diese ist höchstens abzählbar und erfüllt nach Proposition 6.12 dieselben Aussagen, die auch das Modell von Γ erfüllt und ist somit auch Modell von Γ. □

Kombinieren wir schließlich den auf- und absteigenden Satz, so können wir allgemeiner Modelle jeder beliebiger unendlicher Mächtigkeit finden.

Korollar 6.16 (Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski)**.** *Sei Σ abzählbar und Γ eine Menge von Aussagen, die ein unendliches Modell hat und A eine beliebige unendliche Menge. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{M}$ von Γ mit $|\mathcal{U}_{\mathcal{M}}| = |A|$.*

Beweis. Zunächst wenden wir den aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem 6.6 an und erhalten ein Modell $\mathcal{J}$ von Γ mit $|A| \leq |\mathcal{U}_{\mathcal{J}}|$. Dann folgen wir dem Beweis des absteigenden Satzes von Löwenheim-Skolem 6.14. In der Konstruktion ersetzen wir jedoch die abzählbare Teilmenge $U_0 \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ durch eine Teilmenge, für die $|U_0| = |A|$ gilt. Diese Wahl ist wegen $|A| \leq |\mathcal{U}_{\mathcal{J}}|$ möglich. Aus der Konstruktion geht auch einher, dass dann dadurch die Menge U ebenfalls $|U| = |A|$ erfüllt, da abzählbare Vereinigungen unendliche

Mächtigkeiten unverändert lassen. Genauer und allgemeiner wird dieses Kardinalitätsargument in [Rot95, Lemma 7.6.6] bewiesen. Somit ist dann ebenfalls analog diejenige Unterinterpretation $\mathcal{I}$ von $\mathcal{J}$ mit Universum U elementar. Wählen wir $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ erhalten wir die Aussage des Korollars. $\square$

Bemerkung 6.17 (Skolemsches Paradoxon, [Rau08, Abschnitt 3.4] und [Rot95, Abschnitt 8.4]). Wir betrachten diejenige Signatur erster Stufe $\Sigma_\in$, die an Relationssymbolen nur das zweistellige Relationssymbol $\in$ und sonst keine Funktionssymbole besitzt. In der Sprache erster Stufe über dieser Signatur ist es nun möglich, die Mengenlehre zu formalisieren. Hierfür ist das ZFC-Axiomensystem (Zermelo-Fränkel mit Auswahlaxiom, siehe [Rau08, Abschnitt 3.4]) eine übliche Herangehensweise. Die zugehörige Theorie nennen wir **ZFC**. Von dieser wird allgemein die Konsistenz angenommen, jedoch ist dies nicht bewiesen.

Nehmen wir auch an, dass **ZFC** konsistent ist, dann ist die Theorie gemäß Satz 4.21 erfüllbar. Also besitzt **ZFC** somit gemäß Korollar 6.15 ein höchstens abzählbares Modell $\mathcal{M}$.

Wir schreiben ω für die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathfrak{P}\omega$ für ihre Potenzmenge innerhalb von **ZFC**, die darin insbesondere konstruierbar sind. Weiter ist es möglich, innerhalb von **ZFC** zu beweisen, dass es überabzählbare Mengen gibt. Etwa $\mathfrak{P}\omega$, von der gemäß Satz von Cantor [Rot95, 7.6.5] bekannt ist, eine echt größere Mächtigkeit als die von ω zu besitzen. Dies scheint widersprüchlich, da $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ selbst eben nicht überabzählbar ist, wir aber erwarten, dass $(\mathfrak{P}\omega)^\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}_\mathcal{M}$ überabzählbar viele Elemente enthält.

Dieser nur scheinbare Widerspruch ist das sogenannte Skolemsche Paradoxon. Er löst sich auf, wenn man sich klarmacht, dass sich die Überabzählbarkeit innerhalb der Theorie **ZFC** nicht auf die Überabzählbarkeit auf der Metaebene übertragen lässt. Konkreter bedeutet die Überabzählbarkeit innerhalb von **ZFC**, dass keine Bijektion (in $\mathcal{U}_\mathcal{M}$) zwischen ω und $\mathfrak{P}\omega$ existiert. Dazu ist anzumerken, dass Bijektionen (allgemeiner Funktionen) ebenfalls als Mengen in der Theorie modelliert werden und für ihre Existenz innerhalb der Theorie, diese im Universum des Modells enthalten sein müsste. Aus der Perspektive der Metaebene sind die Elemente $\omega^\mathcal{M}, (\mathfrak{P}\omega)^\mathcal{M} \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$, die ω und $\mathfrak{P}\omega$ denotieren, durchaus abzählbar. Deswegen gibt es auf der Metaebene, jedoch eben nicht in $\mathcal{U}_\mathcal{M}$, eine solche Bijektion.

6.3 Sätze von Lindström

Als kleinen Ausblick betrachten wir in diesem Unterabschnitt die Sätze von Lindström. Dabei gehen wir nicht genauer auf die konkrete Definition der Begriffe oder die Beweise der Sätze ein. Die vollständige Ausformulierung dieser befindet sich in [EFT18, Abschnitt 13], an der wir uns hier orientieren.

Für die Prädikatenlogik erster Stufe haben wir nun gesehen, dass sowohl der auf- und absteigende Satz von Löwenheim-Skolem (Sätze 6.6 und 6.14) gelten, als auch, dass die Menge der allgemeingültigen Sätze rekursiv aufzählbar ist (Bemerkung 5.21). Wir erinnern uns ebenfalls daran, dass der aufsteigende Satz eine Folgerung des Endlichkeitssatzes (Korollar 6.4) ist.

Darüber hinaus gibt es allgemeiner sogenannte *logische Systeme*, zu denen die Prädikatenlogik erster Stufe auch zählt. Diese besitzen eine (abstrakte) Syntax und ordnen den entsprechenden Aussagen Wahrheitswerte in Interpretationen zu. Logische Systeme können außerdem *echt ausdrucksstärker* sein als andere logische Systeme.

Die Sätze von Lindström zeigen uns, dass die Prädikatenlogik erster Stufe das ausdrucksstärkste logische System ist, sodass alle der obigen Eigenschaften noch erfüllt bleiben. Etwas genauer wären dies folgende Sätze:

Satz 6.18 (Erster Satz von Lindström, [EFT18, Abschnitt 13.3]). *Es gibt kein logisches System, das echt ausdrucksstärker ist als die Prädikatenlogik erster Stufe, für das der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem und der Endlichkeitssatz gelten.*

Satz 6.19 (Zweiter Satz von Lindström, [EFT18, Abschnitt 13.4]). *Es gibt kein logisches System, das echt ausdrucksstärker ist als die Prädikatenlogik erster Stufe, für das der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem gilt und die Menge der allgemeingültigen Sätze rekursiv aufzählbar ist.*

Insbesondere Satz 6.19 zeigt, dass die Prädikatenlogik erster Stufe zwar bestimmte „Grenzen“ aufweist, jedoch stärkere Logiken gegebenenfalls auf andere eher nützlichere Resultate verzichten müssen. Ist nämlich die Menge der allgemeingültigen Aussagen nicht einmal rekursiv aufzählbar, so existiert für das logische System kein adäquater Beweiskalkül, wie es der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik erster Stufe ist.

7 Schluss und Ausblick

Die Prädikatenlogik erster Stufe ist ein logisches System, welches uns erlaubt einen Großteil der Mathematik mithilfe von formalen Sprachen zu modellieren. Dadurch werden mathematische Aussagen zu Wörter, denen wir dann mithilfe von Interpretationen Wahrheitswerte zuordnen können, ebenfalls wie in der Mathematik der Metaebene. Eng verbunden mit der Wahrheitswertzuordnung ist der Begriff der Folgerung, angelehnt an das mathematische Beweisen. Folgerungen konnten wir dann schließlich durch den Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ adäquat gemäß Satz 4.18 modellieren. Dies erlaubt uns, Folgerungen rein syntaktisch durchzuführen, ohne die dahinterliegende Semantik verwenden zu müssen. Vorteilhaft ist der Sequenzenkalkül daher, dass er nach Lemma 5.6 gewissermaßen rekursiv aufzählbar ist und damit mithilfe von Algorithmen, die beispielsweise auf Turingmaschinen realisiert werden können, aufgezählt werden können.

Trotzdem stoßen wir an gewisse Grenzen. Als Erstes konnten wir mithilfe des Diagonalisierungslemmas den essentiellen Unentscheidbarkeitssatz 5.19 zeigen, aus dem die Existenz von unentscheidbaren Theorien folgt. Die Unentscheidbarkeit führte uns dann zum ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz 5.23, welcher zeigt, dass es Aussagen gibt, die gar nicht erst bewiesen oder widerlegt werden können. Insbesondere hat der Satz zur Folge, dass die Wahrheit nicht der Beweisbarkeit entspricht. Explizit bedeutet das, dass es wahre (beispielsweise in der Standardinterpretation) Aussagen gibt, die nicht beweisbar sind. Darüber hinaus lässt sich dies dann auch allgemeiner auf Theorien, die nicht unbedingt **Q** erweitern, aber dennoch auf gewisse Weise hinreichend mächtig sind, übertragen. Denn z.B. in **ZFC** gibt es an sich keine natürlichen Zahlen und ihre Operationen sowie Relationen als Symbole, jedoch können diese durch Formeln und Terme ausgedrückt werden (siehe [BBJ07, S. 224]).

Überdies ist der *zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz* ein weiteres bekanntes Resultat, welches eine verwandte Grenze aufzeigt. Dieser besagt nämlich, dass die Konsistenz von gewissen Theorien in der Theorie selbst nicht beweisbar ist. Konkreter sind es konsistente, axiomatisierbare Erweiterungen der Peano-Arithmetik **P** (siehe [BBJ07, 18.1]).

Zuletzt konnten wir mithilfe des Endlichkeitssatzes, woraus der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem folgt, und des absteigenden Satzes von Löwenheim-Skolem ein weiteres Hindernis aufdecken. Nämlich können wir für eine Theorie die Mächtigkeit ihrer Modelle zwar im Endlichen kontrollieren, sogar auch zwischen endlichen und unendlichen Modellen unterscheiden. Aber zwischen unendlichen Mächtigkeiten können wir dies nicht. Hat eine Theorie ein unendliches Modell, so hat es gemäß Korollar 6.16 Modelle jeder unendlichen Mächtigkeit. Der absteigende Satz 6.14 zeigt sogar das etwas stärkere Resultat, dass man gegeben einer unendlichen Ausgangsinterpretation eine „kleinere“ unendliche elementare Unterinterpretation, etwa von abzählbarer Mächtigkeit, konstruieren kann. Das heißt also insbesondere, dass die Unterinterpretation allen Aussagen dieselben Wahrheitswerte zuordnet wie die Ausgangsinterpretation. Tatsächlich kann man ein ähnliches Resultat für die aufsteigende Version des Satzes zeigen. Also, dass jede unendliche Interpretation eine elementare *Erweiterung* von beliebig großer Mächtigkeit besitzt (siehe [Rot95, 8.4.3]).

Trotz dieser Grenzen, muss hierbei erwähnt bleiben, dass diese die Prädikatenlogik erster Stufe nicht weniger nützlich machen. Einerseits ist es zwar möglich in ausdrucksstärkeren logischen Systemen die Mächtigkeiten der Modelle durch ihre Aussagen zu einem gewissen Grade einzuschränken. Beispielsweise in der *Prädikatenlogik zweiter Stufe* gelten weder der Endlichkeitssatz noch der absteigende Satz von Löwenheim-Skolem (siehe [EFT18, 9.1.4 und 9.1.5]). Andererseits verliert man die Existenz eines adäquaten Beweiskalküls, wie es der Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik erster Stufe ist (siehe [EFT18, 9.1.6]), was eine stärkere Grenze als die Unentscheidbarkeit und Unvollständigkeit darstellt. Die Sätze von Lindström in Unterabschnitt 6.3 verdeutlichen nochmals, dass die Prädikatenlogik erster Stufe durch diese Grenzen als logisches System zum Teil charakterisiert wird.

8 Referenzen

[Rot95] Philipp Rothmaler. *Einführung in die Modelltheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995. ISBN: 9783860254615.

[BBJ07] George S. Boolos, John P. Burgess und Richard C. Jeffrey. *Computability and Logic*. 5. Aufl. Cambridge University Press, 2007. DOI: `10.1017/cbo9780511804076`.

[Rau08] Wolfgang Rautenberg. *Einführung in die Mathematische Logik*. 3. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag, 2008. DOI: `10.1007/978-3-8348-9530-1`.

[LK15] Christopher C. Leary und Lars Kristiansen. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. 2. Aufl. Milne Library Publishing, 2015. ISBN: 9781942341079. URL: `https://knightscholar.geneseo.edu/geneseo-authors/6`.

[EFT18] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. 6. Aufl. Springer Berlin Heidelberg, 2018. DOI: `10.1007/978-3-662-58029-5`.

[Sch22] André Schulz. *Grundlagen der Theoretischen Informatik*. Springer Berlin Heidelberg, 2022. DOI: `10.1007/978-3-662-65142-1`.