Bachelorarbeit

Starrheit der Extremwerte der L_p-Norm der zentroaffinen Krümmung in zentroaffiner Parametrisierung

David Seyboldt

15. Februar 2022

Fakultät für Mathematik und Informatik
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Supervisor: Prof. Dr. Peter Albers

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, David Seyboldt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Heidelberg, den 15. Februar 2022

D. Seyboldt

David Seyboldt

Abstract

In their paper [1] P. Albers and S. Tabachnikov proposed a generalization of the 2-dimensional notions of convex and star-shaped curves, calling them symplectically convex and symplectically star-shaped. By giving such curves a fixed parametrization called centroaffine parametrization, one finds that the curve is determined by its initial condition and its so called centroaffine curvature. Similiar to [2] we now want to study the L_p norm of this centroaffine curvature. We find that ellipses are always extremes of this functional. For some parameters there also exist other extremes. We then determine when first and second order deformations of ellipses exist.

Zusammenfassung

In ihrem Paper [1] haben P. Albers und S. Tabachnikov eine Verallgemeinerung der 2-dimensionalen Begriffe konvexer und sternförmiger Kurven vorgeschlagen mit den Begriffen symplektisch konvex und symplektisch sternförmig. Indem man solchen Kurven eine feste Parametrisierung namens zentroaffine Parametrisierung gibt, so sind diese bereits durch ihre Initialwerte und die sogenannte zentroaffine Parametrisierung bestimmt. Ähnlich wie in [2] wollen wir nun die L_p-Norm dieser zentroaffinen Krümmung untersuchen. Wir finden, dass Ellipsen stets Extremstellen sind. Für einige Parameter existieren auch andere Extremstellen. Wir untersuchen dann, wann Deformationen erster und zweiter Ordnung von Ellipsen existieren.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Es sei γ eine geschlossene glatte Kurve im $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen mit $[a,b] := \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ die Standardvolumenform des $\mathbb{R}^2$.

Definition 1.1 γ heißt *symplektisch sternförmig*, falls $[\gamma(t), \gamma'(t)] > 0 \ \forall t$, und heißt *symplektisch konvex*, falls $[\gamma'(t), \gamma''(t)] > 0$.

Wenn γ symplektisch sternförmig ist, dann können wir durch eine Reparametrisierung erreichen, dass $[\gamma(t), \gamma'(t)] = 1$. Diese Parametrisierung heißt zentroaffine Parametrisierung.
Als Erstes beobachten wir, dass aus $[\gamma, \gamma'] = 1$ folgt, dass $0 = \frac{d}{dt}[\gamma, \gamma'] = [\gamma', \gamma'] + [\gamma, \gamma''] = [\gamma, \gamma''] = \gamma_1\gamma_2'' - \gamma_2\gamma_1''$. Also ist $\gamma_1\gamma_2'' = \gamma_2\gamma_1''$
Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} -[\gamma', \gamma'']\gamma = -(\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1'')\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_1\gamma_2'\gamma_1'' \\ \gamma_2\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2\gamma_2'\gamma_1'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2'\gamma_1'' - \gamma_2\gamma_1'\gamma_1'' \\ \gamma_1\gamma_2'\gamma_2'' - \gamma_2\gamma_1'\gamma_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1''[\gamma, \gamma'] \\ \gamma_2''[\gamma, \gamma'] \end{pmatrix} = \gamma''. \end{aligned}$$

Definition 1.2 Wir nennen $p(t) := [\gamma'(t), \gamma''(t)]$ die sogenannte *zentroaffine Krümmung.*

Wir erhalten damit die Gleichung $\gamma'' = -p\gamma$. Sofern p bestimmt ist, ist dies eine Hillsche Differentialgleichung, die uns γ definiert.

Im Folgenden werden wir nun die Extremstellen des Funktional

$$\mathcal{B}_a(\gamma) := \int_\gamma p^a dt = \int_\gamma [\gamma'(t), \gamma''(t)]^a dt, \tag{1}$$

$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ über dem Raum der geschlossenen glatten symplektisch konvexen und sternförmigen Kurven in zentroaffiner Parametrisierung mit fester Periode (meistens $2\pi n$) untersuchen. Dies entspricht der L_a-Norm der zentroaffinen Krümmung.
Des Weiteren wollen wir infinitesimale Starrheit von speziellen Lösungen untersuchen, und wann diese Maxima oder Minima des Funktionals sind.

Wir wollen nun kurz erläutern, warum wir die Periode fixieren.
Die Periode unserer Kurve legt ihren „Radius“ fest. Denn wenn γ eine Kurve in zentroaffiner Parametrisierung mit Periode n ist, dann gilt für die Kurve $r \cdot \gamma$, dass $[r\gamma, r\gamma'] = r^2[\gamma, \gamma'] = r^2$. Damit diese Kurve dann wieder zentroaffine Parametrisierung hat, benötigen wir eine Reparametrisierung. Diese ist $\overline{\gamma}(t) = r\gamma(t/r^2)$. Damit wir aber die gleiche Kurve umlaufen, ist unsere Periode dann $r^2 n$.
Auf der anderen Seite beobachten wir, dass für diese neue Kurve gilt

$$\mathcal{B}_a(\overline{\gamma}) = \int_0^{r^2 n} \frac{1}{r^{4a}}\left[\gamma'\left(\frac{t}{r^2}\right), \gamma''\left(\frac{t}{r^2}\right)\right]^a dt = \int_0^n \frac{1}{r^{4a}}[\gamma'(t), \gamma''(t)]^a r^2 dt = \frac{1}{r^{4a-2}}\mathcal{B}_a(\gamma).$$

Das bedeutet, dass für $a \neq \frac{1}{2}$ eine Änderung des „Radius“ der Kurve auch das Funktional ändert.

Hauptresultate

Wir finden, dass für $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ nur Ellipsen Extremstellen des Funktionals $\mathcal{B}_a$ (1) sind. Für $a \notin [\frac{1}{2}, 1]$ existieren auch weitere Extremstellen.
In Theorem 1 bestimmen wir die nicht-trivialen infinitesimalen Deformationen von n-fach durchlaufenen Ellipsen im Raum der Extremstellen: Für $a = \frac{1}{3}$ haben wir infinitesimale Starrheit, ansonsten existieren nicht-triviale infinitesimale Deformationen genau dann, wenn

$$a = \frac{k^2 - 2n^2}{k^2 - 4n^2}$$

für ein $k \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$.
In Theorem 2 bestimmen wir, wann der n-mal durchlaufene Einheitskreis ein Maximum oder Minimum des Funktionals $\mathcal{B}_a$ (1) ist: Im Fall $n = 1$ ist der Einheitskreis für $a < 0$ und $a > \frac{7}{5}$ ein lokales Minimum und für $a \in (0, \frac{1}{3}]$ ein lokales Maximum. Im Fall $n \geq 2$ ist der Einheitskreis für $a < \frac{2(n-1)^2-1}{1-4n}$ und $a > \frac{2(n+1)^2-1}{1+4n}$ ein lokales Minimum.
Die Hessische ist degeneriert, genau dann, wenn

$$a = \frac{k^2 - 2n^2}{k^2 - 4n^2}$$

für ein $k \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$. In allen anderen Fällen ist die Hessische indefinit.
Zum Abschluss finden wir in Theorem 3, dass die Extremstellen im Fall $a = \frac{1}{3}$ parallel verschobene Ellipsen sind.

2. Bestimmung der Extremstellen

In diesem Kapitel werden wir die Extremstellen charakterisieren und untersuchen, ob sie existieren.
Mittels Variationsrechnung finden wir folgende Charakterisierung:

Proposition 2.1 *Falls $a = 1$ oder $a = \frac{1}{2}$, ist die zentroaffine Krümmung p konstant und γ eine Ellipse.*
Für $a \neq 1$ genügen die extremalen Kurven von $\mathcal{B}_a$ (1) der Gleichung

$$F''' = -2(2+b)F^b F' \tag{2}$$

wobei $b := \frac{1}{a-1}$ und $F := p^{a-1}$.

Beweis. Sei $v(t)$ ein Vektorfeld entlang $\gamma(t)$. Damit erhalten wir eine infinitesimale Deformation von γ durch $\gamma_\epsilon := \gamma + \epsilon v$. Da γ und γ' linear unabhängig sind, können wir v schreiben als $v = g\gamma + f\gamma'$. Wir berechnen: $v' = g'\gamma + (g+f')\gamma' + f\gamma'' = (g' - fp)\gamma + (g+f')\gamma'$. Damit ist $[\gamma, v'] + [v, \gamma'] = (g+f')[\gamma, \gamma'] + (g - fp)[\gamma, \gamma] + g[\gamma, \gamma'] + f[\gamma', \gamma'] = (g + f')[\gamma, \gamma'] + g[\gamma, \gamma'] = 2g + f'$, da $[\gamma, \gamma'] = 1$.
Da auch γ_ϵ in zentroaffiner Parametrisierung sein muss, da wir die Extrema in der Klasse der Kurven in zentroaffiner Parametrisierung suchen, gilt $1 = [\gamma + \epsilon v, \gamma' + \epsilon v'] = [\gamma, \gamma'] + \epsilon([\gamma, v'] + [v, \gamma']) + \epsilon^2[v, v']$. Da diese Gleichung für alle ϵ gelten muss, erhalten wir mittels Koeffizientenvergleich

$$[\gamma, v'] + [v, \gamma'] = 0.$$

Also ist $2g + f' = 0$. Womit $v = -\frac{f'}{2}\gamma + f\gamma'$.
Es ist nun γ eine Extremstelle des Funktionals $\int p^a(t)dt$, falls

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int [\gamma' + \epsilon v', \gamma'' + \epsilon v'']^a dt \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int \Big([\gamma', \gamma''] + \epsilon([\gamma', v''] + [v', \gamma'']) + \epsilon^2[v', v'']\Big)^a dt \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \int [\gamma', \gamma'']^a + a \cdot \epsilon([\gamma', v''] + [v', \gamma''])[\gamma', \gamma'']^{a-1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) dt \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} a\epsilon \int ([\gamma', v''] + [v', \gamma''])[\gamma', \gamma'']^{a-1} dt \\
&= a \int ([\gamma', v''] + [v', \gamma''])p^{a-1} dt.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int F \cdot ([\gamma', v''] + [v', \gamma''])dt = 0.$$

Mittels partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}
0 &= \int F[\gamma', v''] + F[v', \gamma'']dt \\
&= \int F\frac{d}{dt}[\gamma', v'] + 2F[v', \gamma'']dt \\
&= \int -F'[\gamma', v'] + 2F[v', \gamma'']dt \\
&= \int F'\frac{d}{dt}[v, \gamma'] - F'[v, \gamma''] + 2F\frac{d}{dt}[v, \gamma''] - 2F[v, \gamma''']dt \\
&= \int -F''[v, \gamma'] - F'[v, \gamma''] - 2F'[v, \gamma''] - 2F[v, \gamma''']dt \\
&= \int -F''[v, \gamma'] - 3F'[v, -p\gamma] - 2F[v, -p'\gamma - p\gamma']dt \\
&= \int (F'' - 2pF)[\gamma', v] - (3pF' + 2p'F)[\gamma, v]dt.
\end{aligned}$$

Wobei wir hier verwendet haben, dass $\gamma''' = -p'\gamma - p\gamma'$ und dass die Randterme bei der partiellen Integration 0 sind, da wir über eine geschlossene Kurve integrieren.
Weiter wissen wir, dass $[\gamma, v] = f$ und $[\gamma', v] = \frac{1}{2}f'$, sodass wir mit partieller Integration erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= \int (F'' - 2pF)[\gamma', v] - (3pF' + 2p'F)[\gamma, v]dt \\
&= \int (F'' - 2pF)\frac{1}{2}f' - (3pF' + 2p'F)fdt \\
&= \int (-F''' + 2p'F + 2pF')\frac{1}{2}f - (3pF' + 2p'F)fdt \\
&= \int (-\frac{1}{2}F''' - 2pF' - p'F)fdt.
\end{aligned}$$

Da aber f beliebig wählbar ist, muss somit bereits $-\frac{1}{2}F''' - 2pF' - p'F = 0$ gelten.
Ist nun $a = 1$, dann ist $F = 1$ und somit erhalten wir $p' = 0$. Daraus folgt, dass γ eine Lösung von $\gamma'' = const \cdot \gamma$ und somit eine Ellipse ist.
Ansonsten ist $p = F^b$ und somit $p' = bF^{b-1}F'$. Mittels einsetzen erhalten wir also

$$F''' = -2(2pF' + p'F) = -2(2F^bF' + bF^{b-1}F'F) = -2(2 + b)F^bF'.$$

Im Fall $a = \frac{1}{2}$ ist $b = -2$ und wir erhalten die Gleichung $F''' = 0$. Da F periodisch und positiv ist, da p periodisch und positiv ist, muss F konstant sein. Somit ist auch $p = F^{-2}$ konstant, weswegen γ wieder ein Ellipse ist. $\square$

Da für p konstant auch F konstant ist, sind somit Ellipsen immer Extremstellen des Funktionals.
Wir wollen nun untersuchen, ob es noch andere Extremstellen gibt.

Proposition 2.2 *Für $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ hat Gleichung (2) nur konstante Lösungen.*

Beweis. Da $b \neq -1$ ist, integrieren wir (2) und erhalten

$$F'' = -\frac{2(b+2)}{b+1}F^{b+1} + c, \tag{3}$$

wobei c eine Konstante ist.
Da F periodisch und positiv ist, existieren ein Minimum $m = \min F$ und ein Maximum $M = \max F$. An diesen Stellen ist $F'' \geq 0$ bzw. $F'' \leq 0$ und wir erhalten somit die Ungleichungen

$$0 \geq -\frac{2(b+2)}{b+1}M^{b+1} + c,$$
$$0 \leq -\frac{2(b+2)}{b+1}m^{b+1} + c.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{b+2}{b+1}m^{b+1} \leq \frac{c}{2} \leq \frac{b+2}{b+1}M^{b+1}.$$

Falls nun $b < -2$, so erhalten wir $b+1 < b+2 < 0$ und somit $m^{b+1} \leq M^{b+1}$. Da aber $b+1 < 0$, erhalten wir damit $M \leq m$. Da aber auch gleichzeitig gilt $m \leq M$, muss somit gelten $m = M$ und somit ist F konstant.
Falls nun $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ liegt, so gilt für $b = \frac{1}{a-1}$, dass

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{b} \qquad \text{und} \qquad 1 + \frac{1}{b} < 1.$$

Aus der zweiten Ungleichung erhalten wir $b < 0$ und damit erhalten wir aus der ersten Ungleichung $b < -2$. $\square$

Somit ist für $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ p konstant und damit sind, wegen $\gamma'' = -p\gamma$, die Extremstellen gerade die Ellipsen um den Ursprung.

Lemma 2.3 *Für $a \notin [\frac{1}{2}, 1]$ hat die Gleichung (2) nichtkonstante periodische Lösungen.*

Beweis. Betrachte die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{2}{b+1}q^{b+2} - cq.$$

Die zugehörigen Hamiltongleichungen sind dann

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{2(b+2)}{b+1}q^{b+1} + c,$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p.$$

Wir erhalten damit die Gleichung $q'' = -\frac{2(b+2)}{b+1}q^{b+1} + c$. Dies ist aber gerade Gleichung (3) mit $q = F$.

Weiter berechnen wir

$$dH(q,p) = p\,dp + \left(\frac{2(b+2)}{b+1}q^{b+1} - c\right)\,dq$$

und

$$\mathrm{Hess}H(q,p) = \begin{pmatrix} 2(b+2)q^b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen somit, dass (q,p) ein Extremum ist genau dann, wenn $dH(p,q) = 0$, was bedeutet, dass

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ \frac{2(b+2)}{b+1}q^{b+1} &= c. \end{aligned}$$

Diese Extremstelle ist ein lokales Minimum, falls $\mathrm{Hess}H(p,q)$ positiv definit ist, was gilt, wenn

$$(b+2)q^b > 0.$$

Falls nun $a < \frac{1}{2}$, so gilt für $b = \frac{1}{a-1}$:

$$1 + \frac{1}{b} = a < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{b} < -\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < b \quad \& \quad b < 0.$$

Falls $a > 1$, so gilt

$$1 + \frac{1}{b} = a > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{b} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b > 0.$$

Somit erhalten wir in in beiden Fällen, dass $b + 2 > 0$ und somit auch $(b+2)q^b > 0$, da $q = F$ positiv ist.
Das bedeutet, dass wir für eine geeignete Wahl von c ein lokales Minimum an der Stelle $(q, 0)$ haben.
Damit sind die Höhenlinien $\{H = E\}$ mit $E = H(q,0) + \varepsilon$ um die Stelle $(q,0)$, periodische Kurven. Da $b \neq 0$, ist der Hamiltonian nicht quadratisch, womit unterschiedliche Energielevel E unterschiedliche Perioden haben. Daher können wir mittels Variieren der Höhe und mehrfachem Durchlaufen der Höhenlinien beliebige Perioden konstruieren.
Diese Höhenlinien sind dann Lösungen der Gleichung (3) und damit auch Lösungen von Gleichung (2).

$\square$

3. Untersuchung der infinitesimalen Starrheit des Einheitskreises

Wir betrachten nun den n-mal umlaufenen Einheitskreis: $\gamma_0 = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi n]$. Dies ist eine Extremstelle des Funktionals $\mathcal{B}_a(\gamma) = \int_0^{2\pi n} p^a dt$, da $p = 1$ konstant ist und somit $F''' = -2(2+b)F^b F'$ trivial erfüllt ist. Wir fragen uns nun, welche infinitesimalen Deformationen diese Kurve im Raum der extremalen Kurven erlaubt.
Als Erstes beobachten wir:

Lemma 3.1 *$\mathcal{B}_a$ ist invariant unter Wirkungen der $SL(2,\mathbb{R})$.*

Beweis. Sei $A \in SL(2,\mathbb{R})$. Dann ist $\frac{d}{dt}A\gamma = A\gamma'$ und somit gilt

$$[A\gamma, A\gamma'] = \det(A)[\gamma, \gamma'] = 1,$$
$$[A\gamma', A\gamma''] = \det(A)[\gamma', \gamma''] = 1 \cdot p.$$

Somit erhält A die zentroaffine Parametrisierung und ändert die zentroaffine Krümmung nicht, weswegen $\mathcal{B}_a$ sich nicht ändert. $\square$

Diese Deformationen bilden einen 3-dimensionalen Raum, wir betrachten sie als trivial. Weiter beobachten wir:

Lemma 3.2 *Für $a = \frac{1}{3}$ ist das Funktional $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}$ invariant unter Translationen.*

Beweis. Sei T eine Translation, sodass $[T(\gamma(t)), T(\gamma'(t))] \neq 0$. Dann ist $\overline{\gamma} := T(\gamma) = \gamma + c$ im Allgemeinen nicht mehr zentroaffin parametrisiert. Wir können dies jedoch durch eine Reparametrisierung erreichen. Sei $t(\tau)$ diese Parametrisierung, d.h. $\overline{\gamma}(\tau) = \gamma(t(\tau)) + c$ und $[\overline{\gamma}, \frac{d\overline{\gamma}}{d\tau}] = 1$. Dann gilt für die zentroaffine Krümmung $\overline{p}$, dass

$$\overline{p} = \left[\frac{d\overline{\gamma}}{d\tau}, \frac{d^2\overline{\gamma}}{d\tau^2}\right] = \left[\frac{dt}{d\tau}\frac{d\overline{\gamma}}{dt}, \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2\overline{\gamma}}{dt^2} + \frac{d^2t}{d\tau}\frac{d\overline{\gamma}}{dt}\right] \tag{4}$$

$$= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 \left[\frac{d\overline{\gamma}}{dt}, \frac{d^2\overline{\gamma}}{dt^2}\right] + \frac{dt}{d\tau}\frac{d^2t}{d\tau}\left[\frac{d\overline{\gamma}}{dt}, \frac{d\overline{\gamma}}{dt}\right] = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 p + 0, \tag{5}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\frac{d\overline{\gamma}}{dt} = \frac{d(\gamma+c)}{dt} = \gamma'$.
Somit ist

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(\overline{\gamma}) = \int \overline{p}^{\frac{1}{3}}(\tau) d\tau = \int \frac{dt}{d\tau} p(\tau)^{\frac{1}{3}} d\tau = \int p^{\frac{1}{3}} dt = \mathcal{B}_{\frac{1}{3}}(\gamma). \tag{6}$$

$\square$

Diese Deformationen bilden einen 2-dimensionalen Raum, den wir ebenfalls als trivial betrachten.

Definition 3.3 Wir sagen der n-mal durchlaufende Einheitskreis ist *infinitesimal starr*, falls er keine nicht-trivialen infinitesimalen Deformationen in der Klasse der extremalen Kurven besitzt.

Sei nun $\gamma_1 = -\frac{f'}{2}\gamma_0 + f\gamma_0'$ ein Vektorfeld entlang des Kreises, welches uns damit eine infinitesimale Deformation durch $\gamma_\epsilon = \gamma_0 + \epsilon\gamma_1$ definiert. Da γ_0 die Periode $2\pi n$ hat, hat auch f die Periode $2\pi n$. Da sich jede infinitesimale Deformation über solch eine lineare Deformation beschreiben lässt, genügt es solch ein f zu finden, um eine infinitesimale Deformation zu bestimmen.
Da $SL(2,\mathbb{R})$ und die Translationen triviale infinitesimale Deformationen ergeben, wollen wir zunächst bestimmen, welchen Funktionen f diese entsprechen.
Wir finden:

Lemma 3.4 *Die infinitesimale Wirkung von $SL(2,\mathbb{R})$ entspricht den Funktionen f, welche eine Linearkombination von $1, \cos(2t)$ und $\sin(2t)$ sind.*
Die Translationen entsprechen den Funktionen f, welche eine Linearkombination aus $\cos(t)$ und $\sin(t)$ sind.

Beweis. Es genügt aus Dimensionsgründen zu zeigen, dass $1, \cos(2t), \sin(2t)$ Wirkungen aus $SL(2,\mathbb{R})$ entsprechen. Elemente aus $SL(2,\mathbb{R})$ überführen den Einheitskreis in eine Ellipse. Daher genügt es zu zeigen, dass die deformierte Kurve γ_ϵ in erster Näherung eine Ellipse ist.
Im Fall $f = 1$ erhalten wir $\gamma_1 = 1 \cdot \gamma_0'$. Dann gilt für $\gamma_\epsilon = \gamma_0 + \epsilon\gamma_0'$ modulo ϵ^2, dass

$$\begin{aligned}\gamma_x^2 + \gamma_y^2 &= (\cos(t) - \epsilon\sin(t))^2 + (\sin(t) + \epsilon\cos(t))^2 \\ &= \sin(t)^2 + \cos(t)^2 + \epsilon(2\sin(t)\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t)) + \epsilon^2(\sin(t)^2 + \cos(t)^2) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Daher ist γ_ϵ in erster Näherung ein Kreis, sodass $f = 1$ einer Rotation entlang der Kurve entspricht.
Im Fall $f = \sin(2t)$ berechnen wir $\gamma_\epsilon = \gamma_0 - \epsilon\cos(2t)\gamma_0 + \epsilon\sin(2t)\gamma_0'$.
Wir berechnen nun modulo ϵ^2

$$\begin{aligned}&(1+2\epsilon)\gamma_x^2 + (1-2\epsilon)\gamma_y^2 \\ =&(1+2\epsilon)(\cos(t) - \epsilon\cos(2t)\cos(t) - \epsilon\sin(2t)\sin(t))^2 \\ &+ (1-2\epsilon)(\sin(t) - \epsilon\cos(2t)\sin(t) + \epsilon\sin(2t)\cos(t))^2 \\ =&(1+2\epsilon)(\cos(t)^2 - 2\epsilon\cos(t)(\cos(2t-t))) + (1-2\epsilon)(\sin(t)^2 + 2\epsilon\sin(t)(\sin(2t-t))) \\ =&(1+2\epsilon)(1-2\epsilon)\cos(t)^2 + (1-2\epsilon)(1+2\epsilon)\sin(t)^2 = 1.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass γ_ϵ in erster Näherung eine Ellipse ist.
Im Fall $f = \cos(2t)$ handelt es sich in erster Näherung um eine um $\frac{\pi}{4}$ rotierte Ellipse. Bevor wir die Ellipsengleichung nachrechnen, müssen wir diese zuerst zurückdrehen. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}\gamma_\epsilon &= \gamma_0 + \epsilon\sin(2t)\gamma_0 + \epsilon\cos(2t)\gamma_0' \\ &= \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + \epsilon\begin{pmatrix}\sin(2t)\cos(t) - \cos(2t)\sin(t)\\ \sin(2t) + \cos(2t)\cos(t)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos(t) + \epsilon\sin(t)\\ \sin(t) + \epsilon\cos(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die rotierte Kurve ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \gamma_\epsilon \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4}) + \epsilon\left(\sin(t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(t)\sin(\frac{\pi}{4})\right) \\ \sin(t)\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(t)\sin(\frac{\pi}{4}) + \epsilon\left(\cos(t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4})\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(t+\frac{\pi}{4}) + \epsilon\sin(t+\frac{\pi}{4}) \\ -\cos(t+\frac{\pi}{4}) + \epsilon\cos(t+\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun wieder Modulo ϵ^2, dass

$$\begin{aligned}
&(1-2\epsilon)\overline{\gamma}_x^2 + (1+2\epsilon)\overline{\gamma}_y^2 \\
&= (1-2\epsilon)\left(\sin^2(t+\frac{\pi}{4}) + 2\epsilon\sin^2(t+\frac{\pi}{4})\right) + (1+2\epsilon)\left(\cos^2(t+\frac{\pi}{4}) - 2\epsilon\cos^2(t+\frac{\pi}{4})\right) \\
&= \sin^2(t+\frac{\pi}{4})(1-2\epsilon)(1+2\epsilon) + \cos^2(t+\frac{\pi}{4})(1+2\epsilon)(1-2\epsilon) = 1.
\end{aligned}$$

Daher erfüllt $\overline{\gamma}$ eine Ellipsengleichung und damit ist γ_ϵ in erster Ordnung eine Ellipse.
Im Fall $f = 2\sin(t)$ erhalten wir $\gamma = \gamma_0 - \epsilon\cos(t)\gamma_0 + 2\epsilon\sin(t)\gamma_0'$, sodass wir modulo ϵ^2 berechnen:

$$\begin{aligned}
(\gamma_x + \epsilon)^2 + \gamma_y^2 =& (\cos(t) - \epsilon(\cos(t)^2 + 2\sin(t)^2 - 1))^2 \\
&+ (\sin(t) + \epsilon(-\cos(t)\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t)))^2 \\
=& \cos(t)^2 - 2\epsilon\cos(t)\sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2\epsilon\sin(t)^2\cos(t) = 1.
\end{aligned}$$

Daher haben wir in erster Näherung den Einheitskreis lediglich um ϵ in negative x-Richtung verschoben.
Im Fall $f = 2\cos(t)$ erhalten wir $\gamma = \gamma_0 + \epsilon\sin(t)\gamma_0 + 2\epsilon\cos(t)\gamma_0'$, sodass wir modulo ϵ^2 berechnen, dass

$$\begin{aligned}
\gamma_x^2 + (\gamma_y - \epsilon)^2 =& (\cos(t) + \epsilon(\sin(t)\cos(t) - 2\cos(t)\sin(t)))^2 \\
&+ (\sin(t) + \epsilon(\sin(t)^2 + 2\cos(t)^2 - 1))^2 \\
=& \cos(t)^2 + \sin(t)^2 + \epsilon(-2\cos(t)^2\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t)^2) = 1.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also in erster Ordnung den Einheitskreis um ϵ in y-Richtung verschoben.
$\square$

Damit können wir nun die infinitesimale Starrheit des Einheitskreises bestimmen.

Theorem 1 *Im Fall $a = \frac{1}{3}$ ist der n-mal durchlaufene Einheitskreis starr. Ansonsten existiert eine nicht-triviale infinitesimale Deformation genau dann, wenn*

$$a = \frac{k^2 - 2n^2}{k^2 - 4n^2}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq n$.

Beweis. Da γ_0 fest gegeben ist, berechnen wir zunächst die zentroaffine Krümmung

$$p_0 = [\gamma_0', \gamma_0''] = \det \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = \sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1.$$

Sei wieder $\gamma_\epsilon := \gamma_0 + \epsilon\gamma_1$. Dann ist unter Verwendung von $\gamma_0 = -p_0\gamma_0$ und $p_0 = 1$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{f'}{2}\gamma_0 + f\gamma_0' \\
\gamma_1' &= -\frac{f''}{2}\gamma_0 + \frac{f'}{2}\gamma_0' + f\gamma_0'' \\
\gamma_1'' &= -\frac{f'''}{2}\gamma_0 + \frac{3f'}{2}\gamma_0'' + f\gamma_0''' = -\left(\frac{f'''}{2} + \frac{3f'}{2}p_0 + fp_0'\right)\gamma_0 - fp_0\gamma_0' \\
\implies \gamma_\epsilon' &= \gamma_0' + \epsilon\left(-\frac{f''}{2}\gamma_0 + \frac{f'}{2}\gamma_0' - f\gamma_0\right) \\
\gamma_\epsilon'' &= -\gamma_0 + \epsilon\left(-\left(\frac{f'''}{2} + \frac{3f'}{2}\right)\gamma_0 - f\gamma_0'\right).
\end{aligned}$$

Da γ_ϵ ebenfalls zentroaffine Parametrisierung haben soll, ist

$$\gamma_\epsilon'' = -p_\epsilon\gamma_\epsilon,$$

wobei

$$p_\epsilon = [\gamma_\epsilon', \gamma_\epsilon''] = [\gamma_0' + \epsilon\gamma_1', \gamma_0'' + \epsilon\gamma_1''] = p_0 + \epsilon([\gamma_0', \gamma_1''] + [\gamma_1', \gamma_0'']) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Daher gilt für F_ϵ:

$$F_\epsilon := p_\epsilon^{a-1} = 1 + \epsilon(a-1)([\gamma_0', \gamma_1''] + [\gamma_1', \gamma_0'']) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Wie wir oben berechnet haben ist

$$\gamma_1' = -\left(f + \frac{1}{2}f''\right)\gamma_0 + \frac{1}{2}f'\gamma_0',$$

$$\gamma_1'' = -\left(\frac{3}{2}f' + \frac{1}{2}f'''\right)\gamma_0 - f\gamma_0',$$

sodass wir erhalten

$$\begin{aligned}
q :=& [\gamma_0', \gamma_1''] + [\gamma_1', \gamma_0''] \\
=& -\left(\frac{3}{2}f' + \frac{1}{2}f'''\right)[\gamma_0', \gamma_0] - f[\gamma_0', \gamma_0'] - \left(f + \frac{1}{2}f''\right)[\gamma_0, \gamma_0''] + \frac{1}{2}f'[\gamma_0', \gamma_0] \\
=& \frac{3}{2}f' + \frac{1}{2}f''' + \frac{1}{2}f' = 2f' + \frac{1}{2}f'''.
\end{aligned}$$

Der Fall $a = 1$ ist trivial, da es sich bei den Lösungen des Extremwertproblems um Ellipsen handelt, welche alle mittels Operationen aus $SL(2, \mathbb{R})$ aus dem Einheitskreis erzeugt werden können.

Sei also $a \neq 1$. Ist γ_ϵ nun eine kritische Kurve bezüglich des Funktionals, so gilt Gleichung (3). Die Konstante c in dieser Gleichung darf ebenfalls von ϵ abhängig sein, wir können diese also schreiben als $c_0 + \epsilon c_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Dann erhalten wir durch Einsetzen

$$F_\epsilon'' = -\frac{2(b+2)}{b+1} F_\epsilon^{b+1} + c_0 + \epsilon c_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

und somit

$$\epsilon(a-1)q'' = -\frac{2(b+2)}{b+1}(1 + \epsilon(a-1)(b+1)q) + c_0 + \epsilon c_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Mittels Koeffizientenvergleich von ϵ erhalten wir also

$$q'' = -2(b+2)q + \frac{c_1}{a-1}.$$

Da sowohl q, als auch q'', als Ableitung einer periodischen Funktion, integriert null ergeben, muss $c_1 = 0$ gelten. Wir erhalten also die Differentialgleichung

$$q'' = -2(b+2)q,$$

einen harmonischen Oszillator. Dieser hat genau dann periodische Lösungen, wenn $b+2 \geq 0$. Im Fall $b+2=0$ muss dann notwendigerweise schon $q = 0$ gelten. Dann ist aber $f'' = -4f$ und somit $f = A\sin(2t) + B\cos(2t)$. Daher handelt es sich um eine triviale Deformation. Im Fall $b+2 > 0$ ist q dann eine Linearkombination aus $\cos(\sqrt{2(b+2)}t)$ und $\sin(\sqrt{2(b+2)}t)$.
Da wir aber den Raum der Kurven mit Periode $2\pi n$ betrachten, muss $\sqrt{2(b+2)} = \frac{k}{n}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Aufgelöst erhalten wir damit

$$b = \frac{k^2 - 4n^2}{2n^2} \qquad \text{bzw.} \qquad a = 1 + \frac{1}{b} = \frac{k^2 - 2n^2}{k^2 - 4n^2}.$$

Wir sehen, dass $k \neq 2n$ ist, da sonst $b = 0$, was nicht sein kann. Ebenfalls sehen wir, dass $k \neq 0$ ist, da sonst $(b+2) = 0$.
Umgekehrt müssen wir noch zeigen, dass falls die Bedingung gilt, es eine infinitesimale Deformation gibt. Dafür genügt es ein f zu finden.
Von unseren vorherigen Überlegungen wissen wir, dass $q = 2f' + \frac{1}{2}f'''$. Weiter wissen wir, dass q eine Linearkombination von Sinus und Kosinus ist, sodass wir erhalten

$$2f' + \frac{1}{2}f''' = A\cos\left(\frac{kt}{n}\right) + B\sin\left(\frac{kt}{n}\right),$$

wobei A, B unbestimmt sind. Das ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung. Wir betrachte daher erst die zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$2f' + \frac{1}{2}f''' = 0.$$

Diese hat als allgemeine Lösung $f_{hom} = \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) + \lambda_3$. Die drei verschiedenen Terme entsprechen gerade den trivialen Deformationen durch $SL(2, \mathbb{R})$, wie wir oben gesehen haben. Daher ist lediglich die spezielle Lösung der Differentialgleichung für uns interessant. Diese ist

$$f = A \frac{2n^3}{4kn^2 - k^3} \sin\left(\frac{kt}{n}\right) + B \frac{2n^3}{k^3 - 4kn^2} \cos\left(\frac{kt}{n}\right).$$

Das entspricht genau dann trivialen Deformationen, wenn $k = 0$, $k = n$ oder $k = 2n$. Die Fälle $k = 0$ und $k = 2n$ haben wir oben bereits ausgeschlossen, sodass wir lediglich den Fall $k = n$ betrachten müssen. Ist $k = n$, so ist $a = \frac{1}{3}$ und f entspricht gerade den Translationen. Da für $a = \frac{1}{3}$ die Translationen trivial sind, existieren somit nur triviale infinitesimale Deformationen. In allen anderen Fällen erhalten wir folglich einen 2-dimensionalen Raum von infinitesimalen Deformationen durch Wahl von A und B. $\square$

4. Bestimmung der Art der Extremstelle

Wir wollen nun wissen, ob der Kreis ein Maximum oder Minimum des Funktionals ist. Dafür sei Γ_ϵ eine glatte Kurvenschar um $\gamma_0(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi n]$.
Wir können Γ_ϵ bei $\epsilon = 0$ entwickeln und erhalten damit

$$\Gamma_\epsilon = \gamma_0 + \epsilon\gamma_1 + \epsilon^2\gamma_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

wobei, wie wir bereits gesehen haben, $\gamma_1 = -\frac{f'}{2}\gamma_0 + f\gamma_0'$ ist, mit f $2\pi n$-periodisch.
Da auch jede Kurve der Kurvenschar in zentroaffiner Parametrisierung sein muss, gilt $[\Gamma_\epsilon, \Gamma_\epsilon'] = 1$. Durch Einsetzen der Taylorentwicklung erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
1 = [\Gamma_\epsilon, \Gamma_\epsilon'] &= [\gamma_0 + \epsilon\gamma_1 + \epsilon^2\gamma_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \gamma' + \epsilon\gamma_1' + \epsilon^2\gamma_2' + \mathcal{O}(\epsilon^3)] \\
&= [\gamma_0, \gamma_0'] + \epsilon\left([\gamma_0, \gamma_1'] + [\gamma_1, \gamma_0']\right) + \epsilon^2\left([\gamma_0, \gamma_2'] + [\gamma_1, \gamma_1'] + [\gamma_2, \gamma_0']\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3),
\end{aligned}$$

sodass wir mittels Koeffizientenvergleich erhalten

$$[\gamma_0, \gamma_2'] + [\gamma_1, \gamma_1'] + [\gamma_2, \gamma_0'] = 0. \tag{7}$$

Auch wissen wir, dass $\Gamma_\epsilon'' = -P_\epsilon\Gamma_\epsilon$, sodass wir erhalten

$$\begin{aligned}
P_\epsilon = [\Gamma_\epsilon', \Gamma_\epsilon''] &= [\gamma_0' + \epsilon\gamma_1' + \epsilon^2\gamma_2' + \mathcal{O}(\epsilon^3), \gamma_0'' + \epsilon\gamma_1'' + \epsilon^2\gamma_2'' + \mathcal{O}(\epsilon^3)] \\
&= [\gamma_0', \gamma_0''] + \epsilon\left([\gamma_0', \gamma_1''] + [\gamma_1', \gamma_0'']\right) + \epsilon^2\left([\gamma_0', \gamma_2''] + [\gamma_1', \gamma_1''] + [\gamma_2', \gamma_0'']\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= 1 + \epsilon q + \epsilon^2 r + \mathcal{O}(\epsilon^3) = P_0 + \epsilon\frac{dP_\epsilon}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d^2P_\epsilon}{d\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir definiert

$$q := [\gamma_0', \gamma_1''] + [\gamma_1', \gamma_0''], \qquad r := [\gamma_0', \gamma_2''] + [\gamma_1', \gamma_1''] + [\gamma_2', \gamma_0''].$$

Damit gilt nun mittels Kettenregel

$$\begin{aligned}
P_\epsilon^a &= P_0^a + \epsilon\frac{dP_\epsilon^a}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d^2P_\epsilon^a}{d\epsilon^2}\bigg|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= 1^a + \epsilon\left(a\frac{dP_\epsilon}{d\epsilon}P_\epsilon^{a-1}\right)\bigg|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2}\left(a(a-1)P_\epsilon^{a-2}\frac{dP_\epsilon}{d\epsilon}^2 + aP_\epsilon^{a-1}\frac{d^2P_\epsilon}{d\epsilon^2}\right)\bigg|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= 1 + \epsilon a q + \epsilon^2 a\left(r + \frac{a-1}{2}q^2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

In Kapitel 4 haben wir bereits gesehen, dass $q = 2f' + \frac{1}{2}f'''$.
Somit gilt für das Funktional $\mathcal{B}_a$, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_a(\Gamma_\epsilon) &= \int_0^{2\pi n} P_\epsilon^a dt = \int_0^{2\pi n} 1dt + \epsilon a\int_0^{2\pi n} qdt + \epsilon^2 a\int_0^{2\pi n}\left(r + \frac{a-1}{2}q^2\right)dt + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= 2\pi n + 0 + \epsilon^2 a\int_0^{2\pi n}\left(r + \frac{a-1}{2}q^2\right)dt + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Um zu bestimmen, ob γ_0 ein Maximum oder Minimum ist, genügt also die Betrachtung des Integrals

$$\int_0^{2\pi n} \left(r + \frac{a-1}{2} q^2 \right) dt.$$

Als Erstes berechnen wir mittels partieller Integration und Ausnutzen von $\gamma_0''' = -\gamma_0'$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi n} r dt &= \int_0^{2\pi} [\gamma_0', \gamma_2''] + [\gamma_1, \gamma_1''] + [\gamma_2', \gamma_0''] dt = \int_0^{2\pi n} -[\gamma_0'', \gamma_2'] + [\gamma_1', \gamma_1''] - [\gamma_2, \gamma_0'''] dt \\ &= \int_0^{2\pi n} [\gamma_0''', \gamma_2] + [\gamma_1', \gamma_1''] + [\gamma_2, \gamma_0'] dt = \int_0^{2\pi n} 2[\gamma_2, \gamma_0'] + [\gamma_1', \gamma_1''] dt.\end{aligned}$$

Auch hier fallen die Randterme auf Grund der Periodizität weg.
Durch Integrieren der Gleichung (7) erhalten wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{2\pi n} [\gamma_0, \gamma_2'] + [\gamma_1, \gamma_1'] + [\gamma_2, \gamma_0'] dt = \int_0^{2\pi n} -[\gamma_0', \gamma_2] + [\gamma_1, \gamma_1'] + [\gamma_2, \gamma_0'] dt \\ &= \int_0^{2\pi n} 2[\gamma_2, \gamma_0'] + [\gamma_1, \gamma_1'] dt.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_0^{2\pi n} r dt = \int_0^{2\pi n} [\gamma_1', \gamma_1''] - [\gamma_1, \gamma_1'] dt.$$

Mittels $\gamma_1 = -\frac{f'}{2}\gamma_0 + f\gamma_0'$ folgt

$$\begin{aligned}[\gamma_1, \gamma_1'] &= [-\frac{f'}{2}\gamma_0 + f\gamma_0', -\frac{f''}{2}\gamma_0 + \frac{f'}{2}\gamma_0' + f\gamma_0''] \\ &= \frac{f'f''}{4}[\gamma_0, \gamma_0] - \frac{f'^2}{4}[\gamma_0, \gamma_0'] - \frac{ff'}{2}[\gamma_0, \gamma_0''] - \frac{ff''}{2}[\gamma_0', \gamma_0] + \frac{ff'}{2}[\gamma_0', \gamma_0'] + f^2[\gamma_0', \gamma_0''] \\ &= f^2 + \frac{1}{2}ff'' - \frac{1}{4}f'^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[\gamma_1', \gamma_1''] &= [-\frac{f''}{2}\gamma_0 + \frac{f'}{2}\gamma_0' + f\gamma_0'', -\frac{f'''}{2}\gamma_0 - \frac{f''}{2}\gamma_0' + \frac{f''}{2}\gamma_0' + \frac{f'}{2}\gamma_0'' + f'\gamma_0'' - f\gamma_0'] \\ &= [-\frac{f''}{2}\gamma_0 + \frac{f'}{2}\gamma_0' + f\gamma_0'', -\frac{f'''}{2}\gamma_0 + \frac{3}{2}f'\gamma_0'' - f\gamma_0'] \\ &= \frac{1}{2}ff'' + \frac{1}{4}f'f''' + \frac{3}{4}f'^2 + f^2,\end{aligned}$$

sodass insgesamt gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi n} r dt &= \int_0^{2\pi n} \frac{1}{2}ff'' + \frac{1}{4}f'f''' + \frac{3}{4}f'^2 + f^2 - f^2 - \frac{1}{2}ff'' + \frac{1}{4}f'^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi n} f'^2 + \frac{1}{4}f'f''' dt = \int_0^{2\pi} f'^2 - \frac{1}{4}f''^2 dt.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_0^{2\pi n} q^2 dt = \int_0^{2\pi n} 4f'^2 - 2f'f''' + \frac{1}{4}f'''^2 dt = \int_0^{2\pi n} 4f'^2 - 2f''^2 + \frac{1}{4}f'''^2 dt.$$

Für den Fall $a = \frac{1}{3}$ erhalten wir somit

$$\int_0^{2\pi n} r - \frac{1}{3}q^2 dt = -\frac{1}{12}\int_0^{2\pi n} 4f'^2 - 5f''^2 + f'''^2 dt. \tag{8}$$

Lemma 4.1 *Im Fall $a = \frac{1}{3}$ ist der n-mal durchlaufene Einheitskreis für $n = 1$ ein lokales Maximum und ansonsten ein Sattelpunkt.*

Beweis. Sei

$$f'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{k}{n}t}, \quad c_{-k} = \overline{c}_k$$

die Fourierreihe. Diese existiert, da f $2\pi n$-periodisch und glatt ist. Dann ist

$$f''(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} i\frac{k}{n} c_k e^{i\frac{k}{n}t} \qquad \text{und}$$

$$f'''(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -\frac{k^2}{n^2} c_k e^{i\frac{k}{n}t}.$$

Wir beobachten, dass

$$c_0 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi n} f' dt = \frac{1}{2\pi n}[f]_0^{2\pi n} = 0,$$

da f $2\pi n$-periodisch ist.
Aufgrund der $2\pi n$-Periodizität von $e^{i\frac{k}{n}t}$ sind für das Integral jeweils nur die $k = 0$-Terme von f'^2, f''^2 und f'''^2 relevant. Diese sind:

$$f'^2 : \sum_{k=1}^{\infty} c_k c_{-k}$$

$$f''^2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} c_k c_{-k}$$

$$f'''^2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{n^4} c_k c_{-k}.$$

Da f reellwertig ist, ist $c_{-k} = \overline{c_k}$, womit wir erhalten

$$\int_0^{2\pi n} 4f'^2 - 5f''^2 + f'''^2 dt = 2\pi n \sum_{k=1}^{\infty}\left(4 - 5\frac{k^2}{n^2} + \frac{k^4}{n^4}\right)|c_k|^2.$$

Es ist nun $4 - 5\frac{k^2}{n^2} + \frac{k^4}{n^4} = \left(\frac{k^2}{n^2} - 1\right)\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right)$. Die beiden Degenerationen der Hessischen $k = n$ und $k = 2n$ entsprechen gerade $f = \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t)$ und somit den

Translationen bzw. Deformationen durch $SL(2,\mathbb{R})$, welche wir aber als trivial betrachten und daher ignorieren.
Für $n = 1$ ist $(k^2 - 1)(k^2 - 4) > 0$ für $k \geq 3$ und somit ist die Hessische in diesem Fall negativ definit, sodass der Einheitskreis ein Maximum ist.
Für $n \geq 2$ ist die Hessische indefinit, da $\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\left(\frac{1}{n^2} - 4\right) > 0$ und
$\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right)\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 4\right) < 0$. □

Im allgemeinen Fall gilt nun analog zu oben

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi n} r - \frac{a-1}{2}q^2 dt &= \int_0^{2\pi n} (2a-1)f'^2 - \frac{4a-3}{4}f''^2 + \frac{a-1}{8}f'''^2 dt \\ &= 2\pi n \sum_{k=1}^{\infty} \left[(2a-1) - \frac{4a-3}{4}\frac{k^2}{n^2} + \frac{a-1}{8}\frac{k^4}{n^4}\right]|c_k|^2 \\ &= 2\pi n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right)\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right]|c_k|^2.\end{aligned}$$

Für die finale Betrachtung müssen wir noch das zusätzliche a im quadratischen Term von P^a beachten.

Theorem 2 *Im Fall $n = 1$ ist γ_0 für $a < 0$ und $a > \frac{7}{5}$ ein lokales Minimum und für $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ ein lokales Maximum. Im Fall $n \geq 2$ ist γ_0 ein lokales Minimum für $a < \frac{2(n-1)^2-1}{1-4n}$ und $a > \frac{2(n+1)^2-1}{1+4n}$.*
Die Hessische ist degeneriert, mit 2-dimensionalem Kern, genau dann, wenn

$$a = \frac{k^2 - 2n^2}{k^2 - 4n^2}.$$

In allen anderen Fällen ist die Hessische indefinit.

Beweis. Nach obiger Rechnung ist lediglich der Ausdruck

$$\frac{1}{8}\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right)\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right] \tag{9}$$

relevant. Wir müssen also lediglich bestimmen, wann dieser Term positiv und wann negativ ist.
Wir beobachten zunächst, dass der Term null ist für $k = 2n$. Dies entspricht gerade $f = \sin(2t), \cos(2t)$, welche aber zu den trivialen Deformationen von $SL(2,\mathbb{R})$ gehören und damit irrelevant für die Betrachtung sind.
Im Fall $a = 1$ ist das Vorzeichen von (9) dasselbe, wie das von $-(\frac{k^2}{n^2} - 4)$. Dies ist positiv für $k < 2n$ und negativ für $k > 2n$. Somit sind wir in diesem Fall also indefinit.
Im Fall $a > 1$ ist (9) für große k positiv, da $(a-1)\frac{k^2}{n^2} \to \infty$ und $\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right) \to \infty$. Somit kann die Hessische also lediglich positiv definit sein. Damit sie positiv definit ist muss (9) für alle k positiv sein.

Für $k < 2n$ ist $\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right) < 0$, sodass $\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right] < 0$ gelten muss. Da der Ausdruck monoton wachsend ist, ist dies äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned} &(a-1)\frac{(2n-1)^2}{n^2} - 2(2a-1) < 0 \\ \iff a > &\frac{2(n-1)^2 - 1}{1-4n}. \end{aligned}$$

Da $\frac{2(n-1)^2-1}{1-4n} < 1 < a$ ist dies immer erfüllt.
Für $k > 2n$ ist $\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right) > 0$, sodass $\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right] > 0$ gelten muss. Da der Ausdruck monoton wachsend ist, ist dies äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned} &(a-1)\frac{(2n+1)^2}{n^2} - 2(2a-1) > 0 \\ \iff a > &\frac{2(n+1)^2 - 1}{1+4n}. \end{aligned}$$

Im Fall $a < 1$ ist (9) für große k negativ, da $(a-1)\frac{k^2}{n^2} \to -\infty$ und $\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right) \to \infty$. Daher muss (9) für alle k negativ sein.
Für $k < 2n$ ist $\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right) < 0$, sodass $\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right] > 0$ gelten muss. Da der Ausdruck monoton wachsend ist, ist dies äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned} &(a-1)\frac{(2n-1)^2}{n^2} - 2(2a-1) > 0 \\ \iff a < &\frac{2(n-1)^2 - 1}{1-4n}. \end{aligned}$$

Für $k > 2n$ ist $\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right) > 0$, sodass $\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right] < 0$ gelten muss. Da der Ausdruck monoton wachsend ist, ist dies äquivalent dazu, dass

$$\begin{aligned} &(a-1)\frac{(2n+1)^2}{n^2} - 2(2a-1) < 0 \\ \iff a < &\frac{2(n+1)^2 - 1}{1+4n}. \end{aligned}$$

Da $\frac{2(n+1)^2-1}{1+4n} > 1 > a$ ist dies somit immer erfüllt.
Für die Definitheit der Hessischen ist nun zusätzlich noch, wie oben erwähnt, das Vorzeichen von a relevant. Für $n = 1$ erhalten wir $a < \frac{1}{3}$, sodass der einmal durchlaufene Einheitskreis für $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ ein lokales Maximum und für $a < 0$ ein lokales Minimum ist. Für $n \geq 2$ ist $\frac{2(n-1)^2-1}{1-4n} < 0$, sodass der n-fach durchlaufene Einheitskreis für $a < \frac{2(n-1)^2-1}{1-4n}$ ein lokales Minimum ist.
Des Weiteren ist die Hessische degeneriert, wenn (9) gleich 0 ist für ein k.

Da wir $k = 2n$ ignorieren, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{8}\left(\frac{k^2}{n^2} - 4\right)\left[(a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1)\right] \\ \iff & (a-1)\frac{k^2}{n^2} - 2(2a-1) = 0 \\ \iff & a(k^2 - 4n^2) = (k^2 - 2n^2) \\ \iff & a = \frac{k^2 - 2n^2}{k^2 - 4n^2}. \end{aligned}$$

Der Kern dieser Degenerierung ist, wie wir in Theorem 1 gesehen haben, 2-dimensional.

□

5. Der Fall $a = \frac{1}{3}$

Wir interessieren uns nun für den speziellen Fall $a = \frac{1}{3}$, da hier das Funktional $B_a = \int p^a(t)dt$ auch invariant unter Translationen ist. Wir wollen diese Symmetrie nutzen, um alle Extremstellen zu bestimmen.
Aus $a = \frac{1}{3}$ erhalten wir $b = \frac{1}{a-1} = -\frac{3}{2}$. Damit wird Gleichung (3) zu

$$F'' = -\frac{2(b+2)}{b+1}F^{b+1} + c = 2F^{-\frac{1}{2}} + c. \tag{10}$$

Da $F'' \leq 0$ beim Maximum und $F > 0$, muss somit $c < 0$ sein.
Als Nächstes integrieren wir die Gleichung (10), nachdem wir sie mit $2F'$ erweitern, sodass wir erhalten

$$\begin{aligned} 2F'F'' &= 4F'F^{-\frac{1}{2}} + 2cF' \\ \frac{d}{dt}(F')^2 &= \frac{d}{dt}\left(8F^{\frac{1}{2}} + 2cF\right) \\ (F')^2 &= 8F^{\frac{1}{2}} + 2cF + d'. \end{aligned}$$

Da $F > 0$ ist, können wir annehmen, dass $F(t) = G^2(t)$, wobei G ebenfalls eine positive, periodische Funktion ist. Damit berechnen wir dann

$$\begin{aligned} (F')^2 = ((G^2)')^2 = (2GG')^2 = 4(GG')^2 \quad \text{und} \\ 8F^{\frac{1}{2}} + 2cF + d = 8(G^2)^{\frac{1}{2}} + 2cG^2 + d = 8G + 2cG^2 + d', \end{aligned}$$

sodass wir mit $d := \frac{d'}{4}$ folgende Gleichung erhalten:

$$(GG')^2 = \frac{c}{2}G^2 + 2G + d. \tag{11}$$

Die rechte Seite von (11) ist ein quadratisches Polynom in G und hat daher maximal zwei Nullstellen. G hat aber mindestens ein Maximum und ein Minimum, da G periodisch ist. An diesen Stellen gilt $G' = 0$. Folglich hat das quadratische Polynom genau zwei Nullstellen, weswegen auch G' nur für zwei Werte von G null sein kann. Daher oszilliert G zwischen seinem Maximum und Minimum hin und her und hat keine anderen Extrema.

Wir betrachten nun den speziellen Fall eines n-mal durchlaufenen Kreises mit Radius r, welcher parallel verschoben wurde. Also

$$\gamma(t) = (A + r\cos\alpha(t), B + r\sin\alpha(t)),$$

wobei $\alpha : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi n]$ die zentroaffiner Parametrisierung ist. Zusätzlich benötigen wir $A^2 + B^2 < r^2$, damit zentroaffine Parametrisierung möglich ist. Wir berechnen, dass

$$[\gamma, \frac{d\gamma}{d\alpha}] = \det\begin{pmatrix} A + r\cos\alpha & -r\sin\alpha \\ B + r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} = r^2 + Ar\cos\alpha + Br\sin\alpha.$$

Da nun aber $1 = [\gamma, \frac{d\gamma}{dt}] = [\gamma, \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\gamma}{d\alpha}] = \frac{d\alpha}{dt}[\gamma, \frac{d\gamma}{d\alpha}]$, erhalten wir

$$\frac{dt}{d\alpha} = r^2 + Ar\cos\alpha + Br\sin\alpha.$$

Diese Umformung ist möglich, denn $\alpha(t)$ muss streng monoton wachsend bijektiv sein, sodass wir die Umkehrfunktion $t(\alpha)$ bilden können, für deren Ableitung die obige Formel gilt.
Diese Gleichung können wir nun trivial integrieren und erhalten damit

$$t(\alpha) = \int_0^\alpha r^2 + Ar\cos\alpha' + Br\sin\alpha' d\alpha' = r^2\alpha + Ar\sin\alpha - Br\cos\alpha + Br. \tag{12}$$

Da wir aber wissen, dass $t(2\pi n) = 2\pi$ ist, da $t \in [0, 2\pi]$ und $\alpha \in [0, 2\pi n]$, erhalten wir

$$2\pi = r^2 2\pi n,$$

bzw.

$$r = n^{-\frac{1}{2}}.$$

Weiterhin bekommen wir durch Umstellen von (12)

$$\alpha + \frac{A}{r}\sin\alpha - \frac{B}{r}\cos\alpha = \frac{t}{r^2} - \frac{B}{r}.$$

Weiter gilt für $\theta := \arctan\frac{A}{B}$, dass

$$\sin\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{und} \quad \cos\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Wir erhalten mittels Additionstheoremen

$$\frac{A}{r}\sin\alpha - \frac{B}{r}\cos\alpha = -\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{r}\cos(\alpha+\theta).$$

Unter Verwendung von $r = n^{-\frac{1}{2}}$ erhalten wir

$$\alpha + \theta - \sqrt{n}\sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha+\theta) = nt + \frac{\theta - \sqrt{n}B}{n}. \tag{13}$$

Eine Differenzierung nach t liefert

$$\frac{d\alpha}{dt} = n\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha+\theta)\right)^{-1}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} p &= \left[\frac{\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right] = \left[\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\gamma}{d\alpha}, \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\frac{d\gamma}{d\alpha}\right] = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3 \left[\frac{d\gamma}{d\alpha}, \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right] \\ &= n^3\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{A^2+B^2}\sin(\alpha+\theta)\right)^{-3} \cdot 1. \end{aligned}$$

Da nun $G^2 = F = p^{\frac{1}{3}-1} = p^{-\frac{2}{3}}$, erhalten wir

$$G(t) = p^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{n} + \sqrt{n}\sqrt{A^2 + B^2}\sin(\alpha(t) + \theta). \tag{14}$$

Wir wollen nun mit dem allgemeinen Fall fortfahren.
Seien m das Minimum und M das Maximum von G. Es gilt $m, M > 0$, da $G > 0$ per Definition. Da $c < 0$, wie wir oben festgestellt haben, existiert ein k, sodass $c = -2k^2$.
Da m und M die Nullstellen des quadratischen Polynoms von (11) sind, können wir diese Gleichung somit schreiben als

$$(GG')^2 = k^2(G - m)(M - G).$$

Da beide Seiten offensichtlich positiv sind, können wir die Wurzel ziehen und erhalten die Gleichung

$$GG' = k\sqrt{(G - m)(M - G)}. \tag{15}$$

Wir definieren zudem

$$\mu = \frac{M + m}{2}, \quad \epsilon = \frac{M - m}{2}.$$

Wegen $m > 0$, ist $\epsilon < \mu$.
Da G zwischen m und M oszilliert, können wir folgende Substitution durchführen:

$$G(t) = \mu + \epsilon \sin \varphi(t), \tag{16}$$

wobei φ nicht unbedingt eine periodische Funktion sein muss. Da G 2π-periodisch ist, muss somit aber $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi n$, wobei hier $n \in \mathbb{Z}$.
Mittels dieser Substitution berechnen wir

$$\begin{aligned} G'(t) &= \epsilon\varphi'(t)\cos\varphi(t) \qquad \text{und} \\ k\sqrt{(G - m)(M - G)} &= k\sqrt{(\mu + \epsilon\sin\varphi - m)(M - \mu - \epsilon\sin\varphi)} \\ = k\sqrt{\epsilon^2(1 + \sin\varphi)(1 - \sin\varphi)} &= k\epsilon\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = k\epsilon\cos\varphi. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir insgesamt für Gleichung (15)

$$\varphi'\epsilon\cos\varphi(\mu + \epsilon\sin\varphi) = GG' = k\sqrt{(G - m)(G - M)} = k\epsilon\cos\varphi,$$

und somit

$$\varphi' \cdot (\mu + \epsilon\sin\varphi) = k.$$

Integrieren wir diese Differentialgleichung, so erhalten wir

$$\mu\varphi(t) - \epsilon\cos\varphi(t) = kt + C. \tag{17}$$

Da $0 < \epsilon < \mu$, ist die linke Seite dieser Gleichung eine streng monoton wachsende Funktion in φ. Daher existiert eine Umkehrfunktion, sodass wir die Gleichung nach φ auflösen können, weswegen φ bereits eindeutig durch diese Gleichung bestimmt ist.
Wenn wir nun $t + 2\pi$ in (17) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu\varphi(t+2\pi) - \epsilon\cos\varphi(t+2\pi) &= k(t+2\pi) + C \\ \implies \mu(\varphi(t) + 2\pi n) - \epsilon\cos\varphi(t) &= kt + C + 2\pi k = 2\pi k + \mu\varphi(t) - \epsilon\cos\varphi(t) \\ \implies \mu(\varphi(t) + 2\pi n - \varphi(t)) &= 2\pi k \\ \implies \mu n &= k. \end{aligned}$$

Wir bekommen damit die Gleichung

$$\varphi - \frac{\epsilon}{\mu}\cos\varphi = nt + \frac{C}{\mu}. \tag{18}$$

Damit können wir nun alle Extremstellen im Fall $a = \frac{1}{3}$ bestimmen:

Theorem 3 *Die lokalen Extrema des Funktionals $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}$ sind mehrfach durchlaufene Ellipsen.*

Beweis. Sei γ eine 2π-periodische kritische Kurve des Funktionals $\mathcal{B}_{\frac{1}{3}}$. Dann muss nach obiger Überlegung die Gleichung (18) für ein $n \in \mathbb{Z}$ gelten. Dies definiert $\varphi(t)$, da $\mu > \epsilon$ und somit die Funktion $x \mapsto \mu x - \epsilon\cos x$ streng monoton wachsend, und daher invertierbar ist.
Wir beobachten, dass (18) identisch ist zu Gleichung (13) und Gleichung (16) identisch ist zu Gleichung (14) unter den Identifizierungen $\epsilon = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{n}}$, $\mu = \frac{1}{n}$, $\varphi = \alpha + \theta$ und $C = \frac{\theta - \sqrt{n}B}{n}$. Damit ist auch hier das allgemeine $G(t)$ identisch zum Fall des n-mal durchlaufenden Kreises.
Dies bedeutet insbesondere, dass auch die zentroaffine Krümmung $p(t)$ der Kurve γ identisch ist zur Krümmung des mehrfach durchlaufenen Kreises γ_0.
Damit erfüllen sowohl γ, als auch γ_0 dieselbe Differentialgleichung zweiter Ordnung: $\gamma'' = -p\gamma$.
Betrachten wir nun die Initialwerte von γ und γ_0: $(\gamma(0), \gamma'(0))$ und $(\gamma_0(0), \gamma_0'(0))$. Da $[\gamma, \gamma'] = 1 = [\gamma_0, \gamma_0']$ existiert ein $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $(A\gamma_0(0), A\gamma_0'(0)) = (\gamma(0), \gamma'(0))$. Da Elemente aus $SL(2, \mathbb{R})$ die zentroaffine Krümmung nicht ändern, lösen $A\gamma_0$ und γ somit dieselbe Differentialgleichung zweiter Ordnung. Auf Grund der Definition von A haben sie dieselben Initialwerte, weswegen $A\gamma_0 = \gamma$ gilt.
Da Elemente aus $SL(2, \mathbb{R})$ Ellipsen auf Ellipsen abbilden, ist γ somit eine Ellipse. $\square$

6. Ausblick

Der Fokus dieser Arbeit lag auf der Betrachtung von Ellipsen. Wir wissen jedoch, dass für $a \notin [\frac{1}{2}, 1]$ auch andere Extremstellen existieren. Daher stellt sich die Frage, ob wir diese ähnlich wie im Fall $a = \frac{1}{3}$ genauer bestimmen können. Auch wäre es interessant zu bestimmen, wann Deformationen erster und zweiter Ordnung dieser Extremstellen existieren.

Zudem haben wir gesehen, dass unser Funktional für $a = \frac{1}{3}$ translationsinvariant ist. Hierbei stellt sich die Frage wie punktuell diese Invarianz ist: Sei γ_0 der Einheitskreis. Wie sehr weicht dann $\gamma_0 + c$ davon ab eine Extremstelle für $a \to \frac{1}{3}$ zu sein?

Literatur

[1] P. Albers, S. Tabachnikov. *Symplectically convex and symplectically star-shaped curves – a variational problem* (2020) `https://arxiv.org/abs/2012.14797`

[2] K. Watanabe. *Planar p-elastic curves and related generalized complete elliptic integrals.* Kodai Math. J. 37 (2014), 453-474

[3] I. M. Gelfand, S. V. Formin *Calculus of variations.* Mineola, New York: Dover Publications, 2000.

[4] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* Providence: American Mathematical Society, 2012.

[5] E. T. Whittaker, G. N. Watson. *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions: with an account of the principal transcendental functions.* Fourth edition. Reprinted Cambridge University Press, New York, 1962.