

**Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit in Mathematik

eingereicht im Februar 2022 von

Aaron Paul Osburg

geboren in Speyer

Polare und Hatchet Planimeter ihre Theorie und Konstruktion

Diese Bachelorarbeit wurde angefertigt von
Aaron Paul Osburg
am Heidelberg Experimental Geometry Lab (HEGL)
unter der Betreuung von
Herr Dr. Lucas Dahinden

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den mathematischen Hintergründen zweier Typen von mechanischen Geräten zur Messung des Flächeninhalts ebener Flächen, sogenannten polaren und Hatchet Planimetern. Wir erklären ihre Funktion in einem idealisierten Szenario. Wir erläutern Zusammenhänge zwischen Bewegungen, die Hatchet Planimeter bei der Messung ausführen und Möbiustransformationen, welche die Einheitskreisscheibe erhalten. Schließlich werden Entwurf und Erprobung eigener Modelle von polaren und Hatchet Planimetern, die im Rahmen dieser Arbeit angefertigt wurden, beschrieben.

Abstract

This thesis depicts the mathematical backgrounds of two types of mechanical devices for surface area measurements of plane surfaces, called polar planimeter and hatchet planimeter. We explain their working principle in an idealized scenario. We take a closer look at the movements performed by hatchet planimeters during the measurement process and their link to Möbius transformations preserving the unit disk. Finally, we describe the design, production and application of our own polar and hatchet planimeters, which have been developed as part of this thesis.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Polares Planimeter	7
1.2	Hatchet Planimeter	8
1.3	Aufbau des Dokuments	9
2	Grundlagen	11
3	Theorie polarer Planimeter	18
3.1	Trajektorie von Drehpunkt und Tracer	19
3.2	Das Zählrädchen	24
3.3	Flächenmessungen mit dem polaren Planimeter	26
3.4	Neutraler Kreis und Messungen mit Pol innerhalb der Fläche	32
3.5	Fehlerkompensation mit kompensierenden polaren Planimetern	37
4	Entwurf, Fertigung und Anwendung eines polaren Planimeters	43
4.1	Konstruktion und Fertigung	43
4.2	Gebrauchsanweisung	47
4.3	Kalibrierung und Charakterisierung des polaren Planimeters	48
5	Theorie des Hatched Planimeters	54
5.1	Trajektorie von Hatched und Tracer	55
5.2	Flächenmessungen mit dem Hatched-Planimeter	60
5.3	Die Messfehler von Hatched Planimetern	65
5.4	Verbindung zu Möbiustransformationen	68
6	Entwurf, Fertigung und Anwendung eines Hatched Planimeters	75
6.1	Konstruktion und Fertigung	75
6.2	Bestimmung der Fahrradmonodromie und Flächenmessungen	75
7	Anhang	79
	Literatur	96

Kapitel 1

Einleitung

Planimeter sind mechanische Instrumente zur Messung des Flächeninhalts von ebenen Flächen. Für den Messprozess ist dabei einzig und allein das Abfahren des Randes der zu vermessenden Fläche mit einem Zeiger notwendig. Anschließend kann der Flächeninhalt an der Skala eines Zählrädchens abgelesen werden.¹ Die ersten Planimeter wurden bereits 1814 vom bayrischen Ingenieur Johann Martin Hermann entwickelt [FS07]. Sie waren beliebte Hilfsmittel etwa zur Messung von Landflächen auf Karten und zur Bestimmung von Integralen, lange bevor computergestützte Alternativen zur Verfügung standen [Car04]. Diese Arbeit behandelt zwei Arten von Planimeter, sogenannte *polare planimeter* und *Hatchet Planimeter*, die nun kurz vorgestellt werden.

1.1 Polares Planimeter

1854 entwickelte der Schweizer Mathematiker Jacob Amsler das *polare Planimeter*. Sein Entwurf war verglichen mit früheren Planimetern besonders handlich, mechanisch unkompliziert und benutzerfreundlich. Aufgrund dieser Eigenschaften hat sich diese Bauart bis heute durchgesetzt und nahezu alle modernen Planimeter bauen auf Amslers Entwurf und dessen mathematischen Prinzipien auf, siehe [FS07].

In Abbildung 1.1 ist eine schematische Darstellung eines polaren Planimeters zu sehen. Ein polares Planimeter besitzt einen ortsfest auf der Ebene zu platzierenden Sockel (*Pol*). An diesen ist ein beweglicher Arm angebracht, der frei um den Pol rotieren kann (*Polarm*). Das andere Ende des Polarms ist wiederum Drehpunkt für einen weiteren beweglichen Arm (*Fahrarm*), an dessen Ende sich ein Zeiger (*Tracer*) befindet. Außerdem ist ein Zählrädchen am Fahrarm angebracht, an dessen Skala die Messwerte abgelesen werden, siehe [FS07]. Die Achse des Zählrädchens ist parallel zum Fahrarm ausgerichtet. Neben diesen essentiellen Bestandteilen können Planimeter noch weitere Bauteile wie zum Beispiel ein zweites Rädchen, das die Anzahl voller Umdrehungen des Zählrädchens anzeigt, besitzen.

Um eine gegebene Fläche zu vermessen, platziert man den Pol außerhalb der Fläche. Die beiden Arme müssen dabei lang genug sein, dass sich die Fläche im Inneren des Kreises befindet, der bei vollständig ausgeklapptem Fahrarm vom Tracer überstrichen werden kann. Außerdem muss sich

¹Modernere Ausführungen besitzen häufig ein Display anstelle einer analogen Skala. Das Funktionsprinzip ist jedoch in beiden Fällen das gleiche.

die Fläche außerhalb des Kreises befinden, der bei vollständig eingeklapptem Fahrarm vom Tracer überstrichen werden kann, falls der Fahrarm kürzer als der Polarm ist. Dann setzt man das Zählrädchen auf 0, platziert den Tracer auf einem Punkt auf dem Rand der Fläche und fährt den Rand ab. Bewegt sich der Tracer (und damit auch das Zählrädchen) parallel zum Fahrarm, so schleift das Zählrädchen aufgrund der Achsenstellung nur und dreht sich nicht.

Umgekehrt dreht sich das Zählrädchen nur und schleift nicht, falls sich der Tracer senkrecht zum Fahrarm bewegt. Bewegungen in alle anderen Richtungen können als Linearkombination dieser beiden Fälle betrachtet werden. Ist der gesamte Rand der Fläche (gegen den Uhrzeigersinn) abgefahren, so befindet sich das Planimeter in der gleichen Position wie zu Beginn der Messung und am Zählrädchen kann der Flächeninhalt der umfahrenen Fläche abgelesen werden. Das Ergebnis, dass das Abfahren des Randes einer Fläche genügt, um ihren Flächeninhalt zu bestimmen, ist zunächst überraschend. Die mathematischen Hintergründe hierzu werden in Kapitel 3 behandelt.

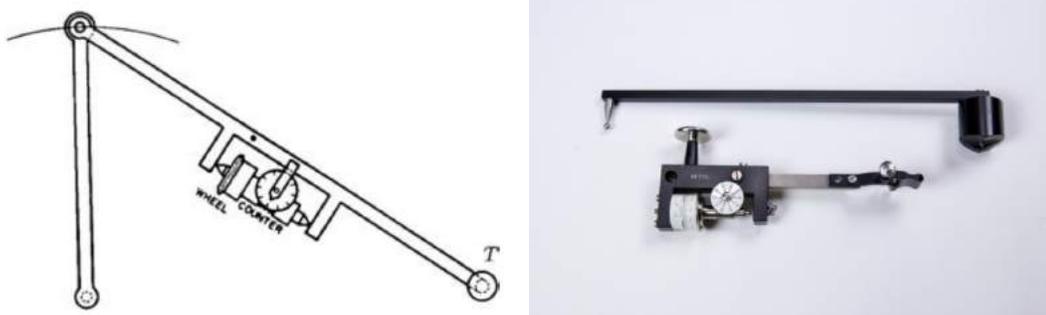


Abbildung 1.1: Links: schematische Darstellung eines polaren Planimeters (Amsler Planimeter). Abbildung entnommen aus [FS07]. Rechts: kompensierendes polares Planimeter. Abbildung entnommen aus [Egg20].

Beim ursprünglichen Entwurf von Amsler sind Polarm und Fahrarm fest miteinander verschraubt. Wie wir später sehen werden, ist die parallele Ausrichtung von Zählrädchenachse und Fahrarm entscheidend für die Funktion des polaren Planimeters. Grenzen in der Fertigungsgenauigkeit setzen der Präzision der Achsenausrichtung jedoch Schranken. Das 1894 von Gottlieb Coradi entwickelte *kompensierende polare Planimeter* (siehe Abbildung 1.1), ermöglicht es, diese Fehlerquelle zu umgehen: Der Pol- und Fahrarm sind zwei voneinander getrennte Teile, die durch eine Steckverbindung auf zwei unterschiedliche Weisen miteinander verbunden werden können. Vermisst man eine Fläche in beiden möglichen Anordnungen und bestimmt den Mittelwert beider Messungen, so heben sich Fehler durch eine ungenaue Achsenausrichtung auf. Für Details siehe Kapitel 3.

1.2 Hatchet Planimeter

Obwohl die Entwicklung des polaren Planimeters eine deutliche Vereinfachung der Konstruktion gegenüber dem ersten Planimeter von J. M. Hermann bedeutete, war ihre Herstellung Ende des 19. Jahrhunderts dennoch sehr teuer, [FLT13]. Dies veranlasste den dänischen Mathematiker Holger Prytz 1875 dazu, eine einfache und kostengünstige Alternative zum polaren Planimeter zu entwickeln: das Hatchet Planimeter (von englisch *hatchet* „Beil“, auch Prytz Planimeter genannt), welches vollkommen ohne bewegliche Teile auskommt. Allerdings ist das Prytz Planimeter im Gegensatz zum polaren Planimeter prinzipiell fehlerbehaftet. Bei passender Dimensionierung und geschickter

Anwendung des Geräts kann der dadurch verursachte Fehler jedoch beliebig verkleinert werden, sodass er in der gleichen Größenordnung wie die sonstigen Messfehler liegt (etwa durch ungenaues Abfahren des Randes der Fläche). Das Hatchet Planimeter besteht aus einem einzigen, an beiden Enden in die gleiche Richtung abgeknickten Stab. Ein Ende ist zu einer scharfen Kante geschliffen (im Folgenden Hatchet genannt) und erlaubt nur Bewegungen des Hatchets in Richtung des Stabs, das andere Ende ist angespitzt und entspricht dem Tracer beim polaren Planimeter.

Die Messung funktioniert ähnlich einfach wie beim polaren Planimeter. Der Tracer wird auf einen Randpunkt der Fläche gesetzt und der Startpunkt des Hatchets markiert. Anschließend wird der Rand der Fläche mit dem Tracer abgefahren und die Endposition des Hatchets markiert. Der Flächeninhalt der umfahrenen Fläche A ist dann näherungsweise gegeben durch

$$A \approx l d, \tag{1.1}$$

wobei l die Distanz von Tracer und Auflagepunkt des Hatchets und d die Distanz von Start- und Endposition des Hatchets bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Approximation genauer ist, wenn man wie in Abbildung 1.2 zu Beginn den Tracer im Schwerpunkt der Fläche statt in einem Randpunkt platziert.

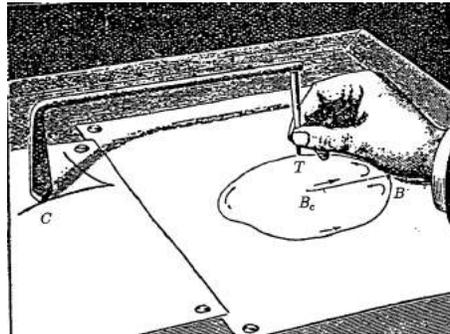


Abbildung 1.2: Darstellung der Anwendung eines Hatchet Planimeters. Abbildung entnommen aus [Foo98].

1.3 Aufbau des Dokuments

Nach der Einführung einiger grundlegender Begriffe in Kapitel 2 beschäftigen wir uns in Kapitel 3 mit polaren Planimetern. Wir zeigen zu Beginn, dass die Position des Verbindungspunktes von Pol- und Fahrarm als glatte Funktion der Position des Tracers aufgefasst werden kann, wenn der Fahrarm bei der Bewegung des Tracers nie vollständig ein- oder ausgeklappt ist. Dies ermöglicht uns, das Rollverhalten des Zählrädchens als Differentialform χ auf dem Gebiet der mit dem Tracer erreichbaren Punkte zu formulieren. Der Messwert des Planimeters ergibt sich dann als Integral über eine Kurve τ , die der Tracer abfährt. Mithilfe des Satzes von Green können wir dann zeigen, dass dieser Messwert dem vom τ umschlossenen Flächeninhalt entspricht, falls es sich bei τ um eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve handelt und der Pol nicht in ihrem Inneren liegt (für Begriffsklärungen siehe Kapitel 2), siehe Satz 22.

Durch Anpassung des Integrationsgebiets bei der Anwendung des Satzes von Green kann dies auch für den Fall gezeigt werden, dass der Pol im Inneren von τ liegt, allerdings muss dann zum Messwert

stets die Fläche des (für jedes Planimeter charakteristischen) neutralen Kreises auf den Messwert addiert werden. Dies ist die Aussage von Satz 27.

In Proposition 32 zeigen wir, dass durch passende Kalibrierung des Planimeters die Flächenmessung auch dann noch funktioniert, wenn die Achse des Zählrädchens nicht parallel zum Fahrarm ist. Die Idee ist, dass sich durch die falsche Achsenstellung entstehende Fehler herausmitteln, wenn wir die gleiche Messung noch einmal in einer zweiten Planimeterstellung (es gibt bei fixiertem Pol genau zwei mögliche Planimeterstellungen, die sich durch Spiegelung entlang der Geraden durch den Pol und den Tracer ineinander überführen lassen) durchführen und den Mittelwert beider Messungen als neuen Messwert annehmen.

Kapitel 5 behandeln wir die mathematischen Hintergründe von Flächenmessungen mit Hatchet Planimetern. In Satz 44 zeigen wir, dass aus der Einschränkung der Bewegung des Hatchets durch die geschliffene Kante Gleichung (1.1) bis auf einen Fehlerterm folgt. Dieser Fehlerterm wird klein, wenn sich das Planimeter nach Abfahren des Randes der zu vermessenden Fläche nur um kleine Winkel $\Delta\theta$ gedreht hat. Wir leiten eine Differentialgleichung für die Bewegung der geschliffenen Kante zu einer gegebenen Trajektorie des Tracers her und nutzen diese, um zu zeigen, dass $\Delta\theta$ für lange Planimeter sehr klein wird und der Fehlerterm $\mathcal{O}(1/l)$ ist, siehe Satz 50.

Fasst man die Richtung, in die der Stab des Hatchet Planimeters zeigt, als Punkt auf S^1 auf, definiert das Abfahren einer Kurve mit dem Tracer als Abbildung von S^1 nach S^1 , die *Fahrradmonodromie*. In Satz 53 zeigen wir, dass es sich bei den Fahrradmonodromien zu stückweise glatten Kurven genau um die Möbiustransformationen, die den Einheitskreis erhalten, handelt. Solche Möbiustransformationen besitzen höchstens zwei Fixpunkte in S^1 besitzen. Wir nutzen die Differentialgleichung für die Bewegung des Hatchets und Satz 50 um zu zeigen, dass die Fahrradmonodromie zu einer gegebenen Trajektorie des Tracers für sehr lange Planimeter keinen Fixpunkt und sehr kurze Planimeter zwei Fixpunkte besitzt. Dies ist die Aussage von Proposition 54.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden eigene Modelle von polaren und Hatchet Planimetern konstruiert und gebaut. In den Kapiteln 4 und 6 werden sie beschrieben und einige Beispielanwendungen vorgestellt.

Kapitel 2

Grundlagen

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Definitionen und Aussagen zur Beschreibung von Planimetern und folgen dabei [AE08a; AE08b].

Definition 1 (Wege, Kurven). Sei $I = [a, b]$ ein reelles Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Eine stetige, k -mal stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt C^k -Weg in \mathbb{R}^n .

Für $k \geq 1$ heißt ein Weg γ in \mathbb{R}^n *stückweise- C^k -Weg* in \mathbb{R}^n , falls es eine Zerlegung von I in endlich viele Stücke $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ gibt, sodass $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für alle $0 \leq i < N$ k -mal stetig differenzierbar ist.

Auf der Menge aller (stückweise-) C^k -Wege in \mathbb{R}^n ist eine Äquivalenzrelation definiert durch

$$\gamma' \sim \gamma \Leftrightarrow \gamma' \text{ ist eine } C^k\text{-Umparametrisierung von } \gamma.$$

Die dazugehörigen Äquivalenzklassen heißen *(stückweise-) C^k -Kurven*. C^0 -Kurven nennen wir kurz Kurven. Ein Repräsentant einer C^k -Kurve Γ heißt (stückweise-) C^k -Parametrisierung von Γ .

Ein C^k -Weg in \mathbb{R}^n , $k \geq 1$, heißt *regulär*, falls seine Ableitung nirgends verschwindet. Eine C^k -Kurve heißt regulär, wenn eine reguläre Parametrisierung für sie existiert. Stückweise- C^k -Wege und -Kurven heißen stückweise regulär, wenn sie diese Eigenschaften stückweise erfüllen.

Im Rest dieser Arbeit werden wir nicht streng zwischen den Begriffen von Kurve, dazugehöriger Parametrisierung und Bild der Kurve unterscheiden.

Sei B eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^2 mit nichtleerem Inneren. Wir bezeichnen mit M_B diejenigen Punkte $p \in B$, für die eine offene Umgebung V_p von p in B existiert, sodass $B \cap V_p$ eine 2-dimensionale (berandete) glatte Untermannigfaltigkeit von V_p ist. M_B ist dann eine 2-dimensionale berandete glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . $S_B := B \setminus M_B$ heißt *Singularitätenmenge* von B . Die Berandung von M_B (als Mannigfaltigkeit mit Rand) bezeichnen wir mit $\text{Rd}(B)$, siehe auch [AE08b, p. 444 ff.].

Definition 2 (Stückweise glattes Gebiet in \mathbb{R}^2). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein nichtleeres Gebiet, d.h. eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Dann ist Ω ein *stückweise glattes Gebiet* in \mathbb{R}^2 , falls es endlich viele Funktionen

$$h_j \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^2) \cup C^\infty((-1, 1), \mathbb{R}^2) \quad , 0 \leq j \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

gibt mit

- (i) $h_j|_{(-1,1)}$ ist eine Parametrisierung einer Teilmenge von $\text{Rd}(\overline{\Omega})$,
- (ii) $\text{Rd}(\overline{\Omega}) = \bigcup_{j=0}^n h_j((-1, 1))$,
- (iii) $\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^n h_j([-1, 1])$.

Den mathematischen Hintergrund für die Funktion von Planimetern bildet der Satz von Green. Er erlaubt es, Flächenintegrale auf Kurvenintegrale zu reduzieren, welche dann leicht analog, zum Beispiel durch ein Zählrädchen, berechnet werden können.

Satz 3 (Satz von Green). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, stückweise glattes Gebiet in \mathbb{R}^2 mit positiv orientierter Randkurve Γ (das heißt, beim Durchlaufen von Γ liegt der an Γ angrenzende Teil von Ω „zur Linken“) und $f, g \in C^1(U)$, wobei U eine offene Umgebung von $\overline{\Omega}$ bezeichnet. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f \, dx + g \, dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (2.1)$$

Beweis. Ein Beweis ist in [AE08b, p. 452] zu finden. □

Definition 4 (Jordankurve). Eine geschlossene Kurve $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren Einschränkung auf $[0, T)$ injektiv ist, heißt *Jordankurve*.

Satz 5 (Jordan'scher Kurvensatz). Sei γ eine Jordankurve. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\gamma)$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, genauer eine beschränkte (das *Innere von γ*) und eine unbeschränkte (das *Äußere von γ*). Die Zusammenhangskomponenten haben jeweils den Rand $\text{Bild}(\gamma)$.

Beweis. Ein Beweis ist in [Mae84] zu finden. □

Möbiustransformationen

Bei der Behandlung von Hatched Planimetern werden wir Zusammenhänge mit Möbiustransformationen entdecken. In diesem Abschnitt führen wir daher alle notwendigen Begriffe und Aussagen ein. Wir beschränken uns dabei aber auf das Nötigste und orientieren uns an den ersten beiden Kapiteln von [And99]. Dort ist auch eine umfassendere Einführung zu finden.

Definition 6 (Möbiustransformation). Eine Abbildung m von $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nach $\bar{\mathbb{C}}$ von der Form

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

heißt *Möbiustransformation*. Möb^+ bezeichnet die Menge aller Möbiustransformationen. Ferner definieren wir die Menge der Möbiustransformationen, die $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ beziehungsweise $\mathbb{D} := B_1(0)$ erhalten mit $\text{Möb}^+(\mathbb{H}) := \{m \in \text{Möb}^+ \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$ und $\text{Möb}^+(\mathbb{D}) := \{m \in \text{Möb}^+ \mid m(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}$.

Bemerkung 7. Die Möbiustransformationen $J(z) = \frac{1}{z}$, $f_{a,b}(z) = az + b$, $a \neq 0$ sind Homöomorphismen von $\bar{\mathbb{C}}$ nach $\bar{\mathbb{C}}$ bezüglich der durch eine stereographische Projektion von S^2 induzierten Topologie auf $\bar{\mathbb{C}}$. Diese besteht aus den offenen Mengen in \mathbb{C} und den Komplementen in $\bar{\mathbb{C}}$ von kompakten Teilmengen von \mathbb{C} . Man kann eine beliebige Möbiustransformation $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ als Komposition solcher Möbiustransformationen schreiben, denn falls $c \neq 0$, ist

$$m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = f_{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}}(z)$$

und $m = f_{ad-bc, \frac{a}{c}} \circ J \circ f_{c^2, cd}$ falls $c \neq 0$.

Möbiustransformationen sind also Homöomorphismen von $\bar{\mathbb{C}}$ nach $\bar{\mathbb{C}}$.

Lemma 8. $(\text{Möb}^+, \circ)$ ist eine Gruppe und $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ und $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ sind Untergruppen von Möb^+ .

Beweis. Sei $m \in \text{Möb}^+$, $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Dann ist die Inverse von m gegeben durch

$$m^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Wegen $(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$ ist $m^{-1} \in \text{Möb}^+$. Außerdem ist Möb^+ abgeschlossen bezüglich Komposition, denn für $m, n \in \text{Möb}^+$, $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $n(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ist

$$(n \circ m)(z) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$

und

$$\begin{aligned} (\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) &= \det \left(\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \det \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{\neq 0} \underbrace{(ad - bc)}_{\neq 0} \neq 0. \end{aligned}$$

Da $\text{id}_{\mathbb{C}} \in \text{Möb}^+ \neq \emptyset$, zeigt dies die Behauptung für Möb^+ nach dem Untergruppenkriterium. Analog folgt die Behauptung für $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ und $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$, da die Inverse und Komposition von \mathbb{H} - beziehungsweise \mathbb{D} -erhaltenden Möbiustransformationen auch \mathbb{H} beziehungsweise \mathbb{D} erhalten. \square

Proposition 9. $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ beinhaltet genau die Möbiustransformationen, die in der Form

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden können.

$\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ beinhaltet genau die Möbiustransformationen, die in der Form

$$m(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \quad \text{mit } |a|^2 - |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C}$$

geschrieben werden können.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage für $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$. Sei $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$, $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. O.B.d.A. gilt $ad - bc = 1$. Weil m und m^{-1} stetig sind, gilt $m(\mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}) = m(\mathbb{H}) \subseteq \overline{m(\mathbb{H})} = \bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}$ und $m^{-1}(\mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}) \subseteq \mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}$, also $m(\mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}) = \mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}$.

Es gilt

$$\text{Möb}^+(\bar{\mathbb{R}}) := \{m \in \text{Möb} \mid m(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}\} = \left\{ m \in \text{Möb} \mid m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = \pm 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Beweis ist in [And99] Satz 2.25 zu finden. Es kann also $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H}) \subseteq \text{Möb}^+(\bar{\mathbb{R}})$ geschrieben werden als $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = \pm 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Also folgt

$$\text{Im}(m(i)) = \text{Im} \left(\frac{ai + b}{ci + d} \right) = \text{Im} \left(\frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} \begin{cases} < 0 & \text{falls } ad - bc = -1 \\ > 0 & \text{falls } ad - bc = 1 \end{cases}.$$

Die \mathbb{H} -erhaltenden Möbiustransformationen sind also gegeben durch

$$\text{Möb}^+(\mathbb{H}) = \left\{ m \in \text{Möb}^+ \mid m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man kann nachrechnen, dass beispielweise¹ $p \in \text{Möb}^+$, $p(z) = \frac{i/\sqrt{2}z+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}z+i/\sqrt{2}}$ erfüllt, dass $p(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$. Für $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ ist also $p \circ m \circ p^{-1} \in \text{Möb}^+(\mathbb{D})$. Umgekehrt ist $p^{-1} \circ n \circ p \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ für beliebige $n \in \text{Möb}^+(\mathbb{D})$. Mit anderen Worten gilt also

$$\text{Möb}^+(\mathbb{D}) = \{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})\}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass für $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ die Abbildung

$$n := p \circ m \circ p^{-1}$$

geschrieben werden kann als $n(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{C}$. Analog zeigt man, dass für ein beliebiges $n : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ in dieser Form gilt, dass

$$p^{-1} \circ n \circ p \in \text{Möb}^+(\mathbb{H}).$$

Wir erhalten also

$$\text{Möb}^+(\mathbb{D}) = \left\{ m \in \text{Möb}^+ \mid m(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, |a|^2 - |b|^2 = 1, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

□

Bemerkung 10. Darüber hinaus gilt $p(\bar{\mathbb{R}}) = S^1$. Da die Elemente aus $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ die erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}}$ erhalten, erhalten also die Elemente aus $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ den Einheitskreis S^1 .

Lemma 11. $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ beinhaltet genau die Abbildungen der Form

$$m(z) = e^{i\lambda} \frac{z+a}{\bar{a}z+1} \quad \text{mit } a \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$ liegt die Abbildung

$$z \mapsto e^{i\lambda} \frac{z+a}{\bar{a}z+1}$$

in $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$, weil

$$e^{i\lambda} \frac{z+a}{\bar{a}z+1} = \frac{\frac{e^{i\lambda/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} z + \frac{e^{i\lambda/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} a}{\left(\frac{e^{i\lambda/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} a\right) z + \left(\frac{e^{i\lambda/2}}{\sqrt{1-|a|^2}}\right)}$$

¹An dieser Stelle könnte man auch jede andere Möbiustransformation p mit $p(\bar{\mathbb{R}}) = S^1$ verwenden.

und

$$\left| \frac{e^{i\lambda/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} \right|^2 - \left| \frac{e^{i\lambda/2}}{\sqrt{1-|a|^2}} a \right|^2 = \frac{1}{1-|a|^2} - \frac{|a|^2}{1-|a|^2} = 1.$$

Umgekehrt gilt für $m(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{C}$ (das heißt insbesondere $a \neq 0$ und $b/a \in \mathbb{D}$). Wir schreiben $a = |a|e^{i\phi}$ für ein geeignetes $\phi \in \mathbb{R}$), dass

$$m(z) = \frac{a}{\bar{a}} \frac{z + (b/a)}{(b/a)z + 1} = e^{i2\phi} \frac{z + (b/a)}{(b/a)z + 1}.$$

□

Bemerkung 12. Da für $a \in \mathbb{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildung $z \mapsto e^{i\lambda} \frac{z+a}{\bar{a}z+1}$ in einer Umgebung von S^1 glatt ist, ist für $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{D})$ die Einschränkung $m|_{S^1}$ ein Diffeomorphismus von S^1 nach S^1 .

Proposition 13. Sei $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{D})$ nicht die Identität. Dann trifft genau einer der folgenden drei Fälle zu.

1. m hat genau zwei Fixpunkte in S^1 .
2. m hat genau einen Fixpunkt in S^1 .
3. m hat keinen Fixpunkt in S^1 .

Im ersten Fall nennen wir m *hyperbolisch*, im zweiten Fall *parabolisch* und im dritten Fall *elliptisch*.

Beweis. Wir zeigen, dass $m \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$, $m \neq \text{id}_{\bar{\mathbb{C}}}$ höchstens zwei Fixpunkt in $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt. Da für

$$p: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}; \quad z \mapsto \frac{(i/\sqrt{2})z + (1/\sqrt{2})}{(1/\sqrt{2})z + (i/\sqrt{2})}$$

laut dem Beweis von Proposition 9 gilt, dass $\text{Möb}^+(\mathbb{D}) = p \circ \text{Möb}^+(\mathbb{H}) \circ p^{-1}$ und $p(\bar{\mathbb{R}}) = S^1$ laut Bemerkung 10, folgt dann die Behauptung. Sei also $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $m \neq \text{id}_{\bar{\mathbb{C}}}$. Falls ∞ kein Fixpunkt von m ist, sind die Fixpunkte von m genau die $z_0 \in \mathbb{R}$, die die folgende Gleichung erfüllen

$$z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \quad \Leftrightarrow \quad cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0.$$

Aus $c = b = d - a = 0$ würde mit $ad - bc = 1$ folgen, dass $m = \text{id}_{\bar{\mathbb{C}}}$. Daher ist die obige Gleichung nicht trivialerweise für alle z_0 erfüllt. Ein reelles Polynom zweiten Grades hat höchstens zwei Nullstellen in \mathbb{R} . Da ∞ kein Fixpunkt von m ist, gilt also die Behauptung für diesen Fall.

Ist hingegen ∞ ein Fixpunkt von m , so gilt $\infty = m(\infty) = \frac{a}{c}$, also $c = 0$. Die übrigen Fixpunkte sind dann genau die reellen Lösungen der Gleichung

$$cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (d - a)z_0 - b = 0.$$

Diese hat jedoch höchstens eine Lösung, denn gälte $d = a$ und $b = 0$ würde folgen, dass m die Identität wäre. Also gilt auch in diesem Fall die Behauptung. \square

Kapitel 3

Theorie polarer Planimeter

In diesem Kapitel erarbeiten wir uns die mathematischen Hintergründe zur Flächenmessung mit polaren Planimetern und gehen von einer Idealisierung des polaren Planimeters aus Abschnitt 1.1 aus (siehe Abbildung 3.1). Unser Modell besteht aus einem steifen Polarm der Länge P definiert durch einen Pol bei $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ und dem Drehpunkt bei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Ausgehend von (x_0, y_0) besteht ein steifer Fahrarm der Länge F . Der zweite Endpunkt des Fahrarms entspricht dem Tracer und wird mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir nehmen aus praktischen Gründen $P > F$ an. Der Zustand des Planimeters kann durch zwei Parameter $\phi, \theta \in \mathbb{R}$ charakterisiert werden mittels

$$(x_0, y_0) = P e^{i\phi} \qquad (x, y) = P e^{i\phi} + F e^{i\theta}.$$

Für den Rest dieses Kapitels bezeichne P die Länge des Polarms und F die Länge des Fahrarms. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ wann immer es nützlich ist.

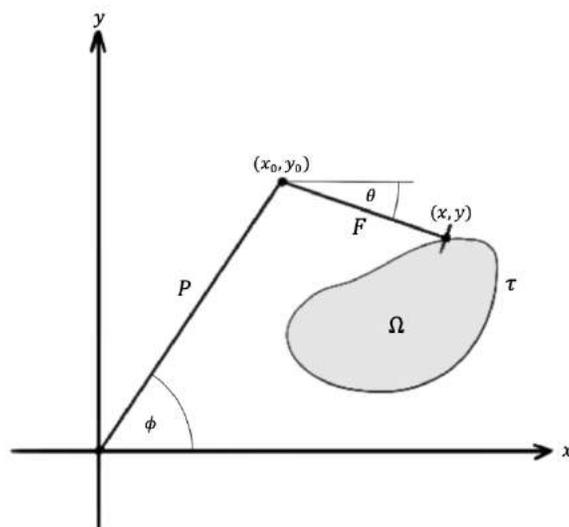


Abbildung 3.1: Idealisiertes polares Planimeter.

Wegen der Einschränkungen durch die Armlängen, kann der Tracer nicht jeden beliebigen Punkt in \mathbb{C} erreichen.

Definition 14. Die Menge $Z := \overset{\circ}{B}_{P+F}(0) \setminus \bar{B}_{P-F}(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *das dem Planimeter zugängliche Gebiet*.

Definition 15. Sei $\tau : [0, T] \rightarrow Z$ eine Kurve. Dann heißt τ *Tracertrajektorie*. Eine Kurve $\delta : [0, T] \rightarrow \partial B_P(0)$ heißt *Drehpunkttrajektorie* zu τ , falls es eine Kurve $\lambda : [0, T] \rightarrow \partial B_F(0)$ gibt, sodass

$$\forall t \in [0, T] : \delta(t) + \lambda(t) = \tau(t).$$

3.1 Trajektorie von Drehpunkt und Tracer

Wir erklären hier, wieso der Drehpunkt als glatte Funktion der Position des Tracers betrachtet werden kann. Zur besseren Lesbarkeit befinden sich die technischen Lemmata am Ende dieses Abschnitts. Da für eine Position des Tracers immer genau zwei passende Drehpunkte existieren (man erhält den zweiten Drehpunkt durch Spiegelung des ersten entlang der Geraden durch den Pol und den Tracer), ist a-priori nicht klar, welche Abbildung die Drehpunkttrajektorie bei der tatsächlichen Anwendung, also beim Abfahren einer Tracertrajektorie, beschreibt. Tatsächlich gibt es nicht *eine* Abbildung, die dies für alle Situationen erfüllt. Mithilfe von Proposition 19 lernen wir jedoch, dass drei sehr anschauliche Voraussetzungen an die Welt und die Bedienung des Planimeters genügen, um jeder Tracertrajektorie eine eindeutige Drehpunkttrajektorie zuzuordnen:

1. Tracer und Drehpunkt bewegen sich stetig, das heißt ihre Trajektorien werden durch Kurven beschrieben.
2. Der Fahrarm ist niemals vollständig ein- oder ausgeklappt. Die Tracertrajektorie darf sich daher nur in Z , nicht aber in ∂Z befinden.
3. Zu Beginn der Messung wird einer der beiden möglichen Drehpunkte zur anfänglichen Position des Tracers festgelegt (ausgedrückt durch die Winkel (θ_0, ϕ_0)).

Wir sehen in Proposition 19, dass der Endpunkt der Drehpunkttrajektorie nur vom Endpunkt der Tracertrajektorie abhängt, falls man festlegt, dass $\theta_0 \in (-\pi, 0)$ (analog lässt sich dies für $\theta_0 \in (0, \pi)$ zeigen). Unter den obigen Voraussetzungen lässt sich also nach Festlegung des Vorzeichens von θ_0 jeder Position des Tracers ein eindeutiger Drehpunkt zuordnen durch

$$(x_0, y_0) := P e^{i(\phi(x,y) + \text{Arg}(x,y))}, \quad (3.1)$$

wobei nach Lemma 16 der Winkel $\phi(x, y)$ je nach Wahl des Vorzeichens von θ_0 gegeben ist durch

$$\phi(x, y) = \pm \arcsin \left(-\frac{F}{P} \sin(\theta(x, y)) \right) = \pm \arcsin \left(-\frac{F}{P} \sin \left(A^{-1} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) \right).$$

Hierbei bezeichnet A^{-1} eine auf $(P-F, P+F)$ glatte Funktion, welche in Lemma 16 definiert wird. Als Verkettung glatter Funktionen ist ϕ also glatt auf Z . Außerdem ist $P e^{i \text{Arg}(z)} = \frac{P}{|z|} z$ glatt auf

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Daher ist (x_0, y_0) glatt als Produkt glatter Funktionen. Nach diesem Abschnitt können wir also den Drehpunkt (x_0, y_0) als glatte Funktion der Tracerposition auffassen. Anschaulich bedeuten diese Überlegungen, dass sich die Richtung des Knicks zwischen den beiden Planimeterarmen beim Betrieb nicht ändert.

Lemma 16. Für $z = r e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ mit $r \in [P - F, P + F]$ gibt es eindeutige $\theta \in [-\pi, 0]$, $\phi \in [-\pi, \pi)$, sodass gilt

$$P e^{i(\phi+\alpha)} + F e^{i(\theta+\alpha)} = z.$$

Es gilt $\phi = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ist $r \in (P - F, P + F)$, so gilt $\theta \in (\pi, 0)$, $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Beweis. Wir zeigen, dass durch

$$A : [-\pi, 0] \rightarrow [P - F, P + F]; \quad \theta \mapsto P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} + F e^{i\theta}$$

eine bijektive Abbildung gegeben ist.

A wohldefiniert und glatt:

Sei $\theta \in [-\pi, 0]$, dann gilt

$$\begin{aligned} P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} + F e^{i\theta} &= P \cos\left(\arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)\right) + F \cos \theta + i \left(P \frac{-F}{P} \sin \theta + F \sin \theta\right) \\ &= P \cos\left(\arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)\right) + F \cos \theta = P \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)\right)} + F \cos \theta \\ &= \sqrt{P^2 - F^2 \sin^2 \theta} + F \cos \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es ist also $P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} + F e^{i\theta}$ in der Tat reell und wegen $P > F$ glatt, da die Wurzelfunktion glatt in $(0, \infty)$ und \sin und \cos glatt sind.

Wir erhalten die Ungleichung

$$P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} + F e^{i\theta} \stackrel{\Delta-UGL}{\leq} \left| P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} \right| + \left| F e^{i\theta} \right| = P + F.$$

Wegen $P > F$ gilt zudem $\sqrt{P^2 - F^2 \sin^2 \theta} > F |\cos \theta|$, also

$$\begin{aligned} P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} + F e^{i\theta} &= \left| P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} + F e^{i\theta} \right| \stackrel{\Delta-UGL}{\geq} \left| \left| P e^{i \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta\right)} \right| - \left| F e^{i\theta} \right| \right| \\ &= |P - F| = P - F. \end{aligned}$$

A ist also wohldefiniert und glatt.

A bijektiv:

Es gilt

$$\frac{dA}{d\theta}(\theta) = \underbrace{-F \sin(\theta)}_{>0 \text{ für } \theta \in (-\pi, 0)} \left[1 + \underbrace{\frac{\cos \theta}{\sqrt{P^2/F^2 - \sin^2 \theta}}}_{\in (-1, 1), \text{ da } P > F} \right] \begin{cases} = 0 & \text{für } \theta \in \{-\pi, 0\} \\ > 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

A ist also streng monoton wachsend, also injektiv. Da A stetig ist und $A(-\pi) = P - F$ und $A(0) = P + F$ gilt, folgt nach dem Zwischenwertsatz, dass A alle Werte in $[P - F, P + F]$ annimmt. A ist also surjektiv und injektiv, also bijektiv.

Somit gibt es genau ein $\theta \in [-\pi, 0]$, sodass $P e^{i(\arcsin(-\frac{F}{P} \sin \theta) + \alpha)} + F e^{i(\theta + \alpha)} = z$: Da $\phi \mapsto P e^{i\phi}$ das Intervall $[-\pi, \pi)$ bijektiv auf $\partial B_P(0)$ abbildet, gibt es kein weiteres $[-\pi, \pi) \ni \phi \neq \arcsin(-F/P \sin \theta)$, das $P e^{i(\phi + \alpha)} + F e^{i(\theta + \alpha)} = z$ erfüllt. Da A bijektiv ist und $A(-\pi) = P - F$ und $A(0) = P + F$, gilt $\theta = A^{-1}(r) \in (-\pi, 0)$, falls $r \in (P - F, P + F)$. \square

Bemerkung 17. Die Umkehrfunktion von A ist gegeben durch

$$A^{-1} : [P - F, P + F] \rightarrow [-\pi, 0] \quad r \mapsto -\arccos \left(\frac{r^2 + F^2 - P^2}{2Fr} \right).$$

Lemma 18. Sei $\tau : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$; $t \mapsto \tau(t) = r(t) e^{i\alpha(t)}$ eine Tracertrajektorie. Seien $\theta_0 \in (-\pi, 0)$, $\phi_0 \in [-\pi, \pi)$ gegeben, sodass

$$\tau(0) = P e^{i(\phi_0 + \alpha(0))} + F e^{i(\theta_0 + \alpha(0))}.$$

Dann gibt es genau eine Kurve $(\theta, \phi) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(\theta(0), \phi(0)) = (\theta_0, \phi_0)$ und

$$\forall t \in [0, T] : \tau(t) = P e^{i(\phi(t) + \alpha(t))} + F e^{i(\theta(t) + \alpha(t))}.$$

Es gilt außerdem, dass $\forall t \in [0, T] : \phi(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\theta(t) \in (-\pi, 0)$. Ist τ stückweise glatt, so auch (θ, ϕ) .

Beweis. Nach Festlegung von $r(0) = |\tau(0)|$ und $\alpha(0) = \text{Arg}(\tau(0))$ dürfen wir nach dem Liftungslemma die Abbildungen

$$r : [0, T] \rightarrow [0, \infty) \qquad \alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

als stetig und eindeutig bestimmt annehmen. Ist τ stückweise glatt, so sind ebenfalls nach dem Liftungslemma auch r, α stückweise glatt. Das Liftungslemma kann angewendet werden, da Z den Ursprung nicht enthält. Per Voraussetzung ist $P e^{i\phi_0} + F e^{i\theta_0} = e^{-i\alpha(0)} \tau(0) \in \mathbb{R}$. Also gilt, da

$\tau([0, T]) \subseteq Z$, dass $P e^{i\phi_0} + F e^{i\theta_0} \in (P - F, P + F)$. Laut dem Beweis von Lemma 16 gilt also

$$\theta_0 = A^{-1}(P e^{i\phi_0} + F e^{i\theta_0}) = A^{-1}(r(0)) \text{ und } \phi_0 = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta_0\right). \quad (*)$$

Da A bijektiv und glatt ist mit $\frac{dA}{d\theta}(\theta) > 0$ für alle $\theta \in (-\pi, 0)$, folgt aus dem Satz von der Umkehrfunktion, dass

$$A^{-1} : (P - F, P + F) \rightarrow (-\pi, 0)$$

ebenfalls glatt ist. Wir betrachten nun für $t \in [0, T]$

$$\theta(t) := (A^{-1} \circ r)(t) \in (-\pi, 0) \text{ und } \phi(t) := \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin((A^{-1} \circ r)(t))\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dann sind θ, ϕ stetig, da A^{-1} , \arcsin und \sin stetig sind. Ist τ stückweise glatt, so ist zusätzlich r stückweise glatt, also auch θ und ϕ . Es folgt

$$\begin{aligned} P e^{i(\phi(t)+\alpha(t))} + F e^{i(\theta(t)+\alpha(t))} &= e^{i\alpha(t)} \left[P e^{i \arcsin(-\frac{F}{P} \sin((A^{-1} \circ r)(t)))} + F e^{i(A^{-1} \circ r)(t)} \right] \\ &= e^{i\alpha(t)} A(A^{-1}(r(t))) = e^{\alpha(t)} r(t) = \tau(t). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\theta(0) = (A^{-1} \circ r)(0) \stackrel{(*)}{=} \theta_0 \text{ und } \phi(0) = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin((A^{-1} \circ r)(0))\right) = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta_0\right) \stackrel{(*)}{=} \phi_0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass alle weiteren Abbildungen $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(\tilde{\theta}(0), \tilde{\phi}(0)) = (\theta_0, \phi_0)$ und $\forall t \in [0, T] : P e^{i(\tilde{\phi}(t)+\alpha(t))} + F e^{i(\tilde{\theta}(t)+\alpha(t))} = \tau(t)$ nicht stetig sind. Wir nehmen an, $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ sei eine solche stetige Abbildung und unterscheiden die folgenden beiden Fälle.

1. Fall: $\forall t \in [0, T] : \tilde{\theta}(t) \in (-\pi, 0)$ und $\tilde{\phi}(t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Nach Lemma 16 sind für alle $t \in [0, T]$ die Zahlen $\theta(t) \in [-\pi, 0)$, $\phi(t) \in [-\pi, \pi)$ mit der Eigenschaft $\tau(t) = P e^{i(\phi+\alpha(t))} + F e^{i(\theta+\alpha(t))}$ eindeutig bestimmt. Also gilt $\forall t \in [0, T] : \tilde{\theta}(t) = \theta(t)$ und $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$. Außerdem ist $\phi(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$ nach Lemma 16.

2. Fall: $\exists t \in [0, T] : \tilde{\theta}(t) \notin (-\pi, 0)$ oder $\tilde{\phi}(t) \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Obwohl wir nur $\phi_0 \in [-\pi, \pi)$ gefordert haben, ist ϕ_0 schon durch die Forderung $r(0) = P e^{i\phi_0} + F e^{i\theta_0}$ eindeutig bestimmt als $\phi_0 = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta_0\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$, da $\theta_0 \in (-\pi, 0)$, $\phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Weil $\tilde{\theta}, \tilde{\phi}$ stetig sind, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass ein $t' \in (0, T]$ existiert, sodass

$$\tilde{\theta}(t') \in \{-\pi, 0\} \quad \text{oder} \quad \tilde{\phi}(t') \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Wäre $\tilde{\phi}(t') \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, so würde folgen, dass

$$P e^{i\tilde{\phi}(t')} + F e^{i\tilde{\theta}(t')} \in \mathbb{R} \Rightarrow P \sin \tilde{\phi}(t') + F \sin \tilde{\theta}(t') = 0 \Rightarrow |\sin \tilde{\theta}(t')| = \underbrace{\frac{P}{F} |\sin \tilde{\phi}(t')|}_{=1} > 1.$$

Dies ist ein Widerspruch, da \sin nur Werte mit Betrag kleiner oder gleich 1 annimmt. Es müsste also $\tilde{\theta}(t') \in \{-\pi, 0\}$ gelten, das heißt $(\tilde{\theta}(t'), \tilde{\phi}(t')) \in [-\pi, 0] \times [-\pi, \pi)$ mit $P e^{i\tilde{\phi}(t')} + F e^{i\tilde{\theta}(t')} = r(t')$. Nach Lemma 16 ist $\tilde{\phi}(t') = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \tilde{\theta}(t')\right)$. Es gilt also

$$r(t') = P e^{i\tilde{\phi}(t')} + F e^{i\tilde{\theta}(t')} = A(\tilde{\theta}(t')) = \begin{cases} A(0) = P + F & \text{falls } \tilde{\theta}(t') = 0 \\ A(-\pi) = P - F & \text{falls } \tilde{\theta}(t') = -\pi \end{cases}$$

Wegen $\text{Bild}(\tau) \subseteq Z$ ist dies aber ein Widerspruch. Daher muss $\tilde{\theta} = \theta$, $\tilde{\phi} = \phi$ gemäß dem ersten Fall sein. \square

Proposition 19. Sei $\tau : [0, T] \rightarrow Z$; $t \mapsto \tau(t) = r(t)e^{i\alpha(t)}$ eine Tracertrajektorie und $\phi_0 \in [-\pi, \pi)$, $\theta_0 \in (-\pi, 0)$, sodass

$$P e^{i(\phi_0 + \alpha(0))} + F e^{i(\theta_0 + \alpha(0))} = \tau(0)$$

und $(\theta, \phi) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die nach Lemma 18 eindeutige Kurve mit

$$\forall t \in [0, T] : P e^{i(\phi(t) + \alpha(t))} + F e^{i(\theta(t) + \alpha(t))}$$

und $\theta(0) = \theta_0$ und $\phi(0) = \phi_0$. Dann gibt es eine eindeutige Drehpunkttrajektorie δ_{τ, θ_0} zu τ , die nur von τ und θ_0 abhängt. Ist τ stückweise glatt, so auch δ_{τ, θ_0} . Der Endpunkt der Drehpunkttrajektorie hängt nur von $\tau(T)$ ab.

Beweis. Existenz:

Wir können aufgrund des Liftungslemmas r und α als stetig und eindeutig annehmen. Dann folgt die Existenzaussage direkt aus Lemma 18, indem man $\delta_{\tau, \theta_0} := P e^{i(\phi + \alpha)}$ betrachtet. Ist τ stückweise glatt, so auch α nach dem Liftungslemma und ϕ nach Lemma 18. Also ist dann auch δ_{τ, θ_0} stückweise glatt. Da ϕ_0 wie im Beweis von Lemma 16 bereits durch $\tau(0), \theta_0$ bestimmt ist, hängt δ_{τ, θ_0} nur von θ_0 und τ ab.

Eindeutigkeit:

Angenommen es gibt eine weitere stetige Drehpunkttrajektorien $\tilde{\delta}$ zu τ . Nach dem Liftungslemma existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{\phi} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\phi}(0) = \phi(0) + \alpha(0)$ und $\tilde{\delta}(t) = P e^{i\tilde{\phi}(t)}$ für alle $t \in [0, T]$. Sei $\tilde{\lambda} : [0, T] \rightarrow \partial B_F(0)$ eine Kurve mit $\tilde{\delta} + \tilde{\lambda} = \tau$. Nach dem Liftungslemma existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{\theta} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\theta}(0) = \theta(0) + \alpha(0)$ und $\forall t \in [0, T] : \tilde{\lambda}(t) = F e^{i\tilde{\theta}(t)}$. Per Konstruktion sind $(\tilde{\phi} - \alpha)(0) = \phi(0) = \phi_0$ und $(\tilde{\theta} - \alpha)(0) = \theta(0) = \theta_0$. Wäre $\tilde{\delta} \neq \delta_{\tau, \theta_0}$, so folgte $\tilde{\phi} - \alpha \neq \phi$. Aber es gilt

$$\forall t \in [0, T] : \tau(t) = \tilde{\delta}(t) + \tilde{\lambda}(t) = P e^{i[(\tilde{\phi} - \alpha)(t) + \alpha(t)]} + F e^{i[(\tilde{\theta} - \alpha)(t) + \alpha(t)]}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage über ϕ aus Lemma 18.

Beweis der Wegunabhängigkeit des Endpunkts der Drehpunkttrajektorie:

Seien für $i \in \{1, 2\}$ die Tracertrajektorien $\tau_i : [0, T] \rightarrow Z$ $t \mapsto \tau_i(t) = r_i(t)e^{i\alpha_i(t)}$ gegeben. r_i, α_i können nach dem Liftungslemma als stetig und eindeutig angenommen werden mit der Forderung $\alpha_i(0) = \text{Arg}(\tau_i(0))$. Es seien die nach Lemma 16 eindeutigen $\theta_{0,i} \in (-\pi, 0)$, $\phi_{0,i} \in [-\pi, \pi)$ gegeben, sodass $\tau_i(0) = P e^{i(\phi_{0,i} + \alpha_i(0))} + F e^{i(\theta_{0,i} + \alpha_i(0))}$. Weiter seien $(\theta_i, \phi_i) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die nach Lemma 18 eindeutigen Kurven mit $(\theta_i(0), \phi_i(0)) = (\theta_{0,i}, \phi_{0,i})$ und

$$\forall t \in [0, T] : \tau_i(t) = P e^{i(\phi_i(t) + \alpha_i(t))} + F e^{i(\theta_i(t) + \alpha_i(t))}.$$

Nun nehmen wir an, dass τ_1 und τ_2 die gleichen Endpunkte haben, also

$$\begin{aligned} \tau_1(T) = \tau_2(T) &\Rightarrow \alpha_1(T) = \alpha_2(T) + k2\pi \quad \text{für ein geeignetes } k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow P e^{i(\phi_2(T) + \alpha_1(T))} + F e^{i(\theta_2(T) + \alpha_1(T))} &= P e^{i(\phi_2(T) + \alpha_2(T))} + F e^{i(\theta_2(T) + \alpha_2(T))} = \tau_2(T) \\ &= \tau_1(T) = P e^{i(\phi_1(T) + \alpha_1(T))} + F e^{i(\theta_1(T) + \alpha_1(T))}. \end{aligned}$$

Da $\theta_{0,1}, \theta_{0,2} \in (-\pi, 0)$, gilt nach Lemma 18 $\phi_1(T), \phi_2(T) \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\theta_1(T), \theta_2(T) \in (-\pi, 0)$. Es folgt also aus der obigen Gleichung mit Lemma 16, dass $\phi_1(T) = \phi_2(T)$. Dies impliziert

$$\delta_{\tau_1, \theta_{0,1}}(T) = P e^{i(\phi_1(T) + \alpha_1(T))} = P e^{i(\phi_2(T) + \alpha_2(T))} = \delta_{\tau_2, \theta_{0,2}}(T).$$

□

Bemerkung 20. Alle bisher gezeigten Aussagen gelten analog für die zweite beider möglichen Planimeterstellungen, also für die Parameterbereiche $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in [-\pi, \pi)$. Anschaulich entsteht sie durch Spiegelung des Planimeters in seiner bisherigen Stellung an der Gerade durch den Pol und den Tracer. Die Parameter θ und ϕ unterscheiden sich in den beiden Fällen gerade durch ein Vorzeichen. Alle Beweise funktionieren für die zweite Planimeterstellung völlig analog.

3.2 Das Zählrädchen

Das polare Planimeter misst Flächeninhalte durch die Bestimmung eines Integrals, das mechanisch mithilfe eines Zählrädchens ausgeführt wird. Das Zählrädchen beim polaren Planimeter ist an der durch den Fahrarm definierten Gerade fest montiert. Die Achse des Zählrädchens ist parallel zum Fahrarm ausgerichtet. Das Zählrädchen wird also über die Auflagefläche gleiten und sich nicht drehen, falls sich der Tracer (und damit auch der Fahrarm und das Zählrädchen) parallel zum Fahrarm (und damit auch zur Drehachse des Zählrädchens) bewegt. Bewegt sich das Zählrädchen allerdings senkrecht zum Fahrarm, so dreht es sich ausschließlich und gleitet nicht. Zudem zeigt das Rädchen ein lineares Drehverhalten: Die Rotationsgeschwindigkeit ist proportional zur Länge der Projektion des Geschwindigkeitsvektors auf die zur Zählrädchenachse senkrecht stehende Ursprungsgerade. An jedem Punkt ist das Verhalten des Zählrädchens also durch eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} charakterisiert. Da unter Voraussetzung einer stetigen Planimeterbewegung und einem anfänglich vorgegebenen Vorzeichen von θ_0 die Fahrarmstellung durch Drehpunkt und Tracer eindeutig bestimmt ist, lässt sich auch für jeden Punkt $p \in Z$ die lineare Abbildung, die das Zählrädchen beschreibt, eindeutig bestimmen. Wir können $T_p Z = \mathbb{R}^2$ identifizieren und das lokale Verhalten

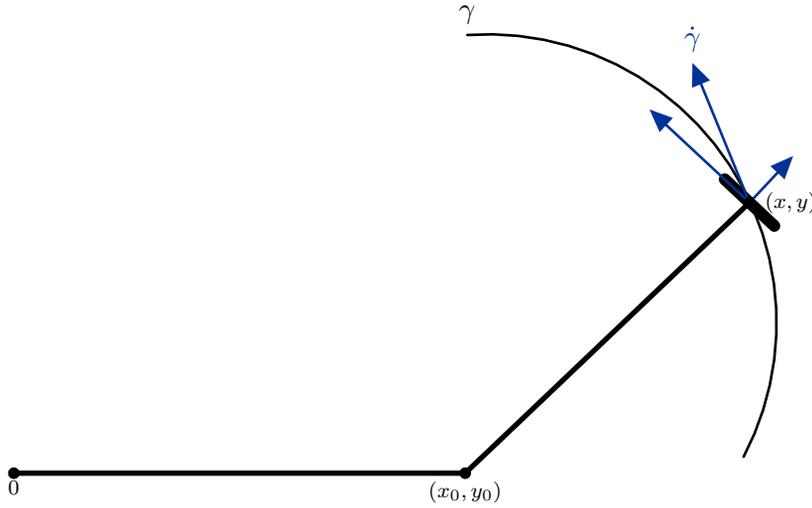


Abbildung 3.2: Zum Fahrarm parallele Anteile des Geschwindigkeitsvektors des Tracers tragen nicht zur Rotation des Zählrädchens bei. Die Rotationsgeschwindigkeit ist proportional zum senkrechten Anteil.

des Zählrädchens mit einer Differentialform $\chi \in \Gamma(T^*Z)$ beschreiben. T_pZ bezeichnet hierbei den Tangentialraum von Z bei p und T^*Z das Kotangentialbündel von Z . Sei $(x_0, y_0) \in \partial B_P(0)$ der zu $(x, y) = p \in Z$ gehörige Drehpunkt. Dann ist der Kotangentialvektor, der das Zählrädchen bei p beschreibt

$$\chi(p) := -\frac{y - y_0}{F} dx + \frac{x - x_0}{F} dy.$$

Die Vorzeichen bei der obigen Definition sind so gewählt, dass ein Abfahren des Randes einer Fläche *gegen* den Uhrzeigersinn einen positiven Messwert für den Flächeninhalt liefert. In der Praxis wird oft der entgegengesetzte Drehsinn verwendet. Um uns an gängige mathematische Konventionen zu halten, behalten wir jedoch den entgegengesetzten Uhrzeigersinn bei. Außerdem gehen wir zunächst davon aus, dass das Zählrädchen die gleiche Position wie der Tracer besitzt. Für ein Zählrädchen am Tracer wird der Messwert $\mathcal{PM}(\tau)$ nach Abfahren der Tracertrajektorie τ beschrieben durch das lineare Funktional

$$\mathcal{PM} : C_{pw}^1([0, T]; Z) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \tau \mapsto F \int_{\tau} \chi \tag{3.2}$$

wobei die Skala des Zählrädchens die gerollte Strecke multipliziert mit der Fahrarmlänge F anzeigt. In der Praxis ist Zählrädchen typischerweise nicht am Tracer angebracht, sondern weist relativ zum Fahrarm eine (nicht notwendigerweise zum Fahrarm parallele) konstante Verschiebung auf. Die Achse ist jedoch weiterhin parallel zum Fahrarm ausgerichtet. Die Differentialform, die das Zählrädchen beschreibt, bleibt also unverändert. Wir betrachten den allgemeinen Fall, dass das

Zählrädchen eine Verschiebung von

$$-\frac{F-f}{F} \begin{pmatrix} x(t) - x_0(x(t), y(t)) \\ y(t) - y_0(x(t), y(t)) \end{pmatrix} + \frac{\mu}{F} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_0(x(t), y(t))) \\ x(t) - x_0(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

zum Tracer aufweist, wobei $\mu, f \in \mathbb{R}$. Die Kurve γ , die das Zählrädchen abfährt, ist dann für eine beliebige Tracertrajektorie τ gegeben durch

$$\gamma(t) := \tau(t) - \frac{F-f}{F} \begin{pmatrix} x(t) - x_0(x(t), y(t)) \\ y(t) - y_0(x(t), y(t)) \end{pmatrix} + \frac{\mu}{F} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_0(x(t), y(t))) \\ x(t) - x_0(x(t), y(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Wir definieren den Messwert des Zählrädchens also wie folgt.

Definition 21. Seien $f, \mu \in \mathbb{R}$ und $\tau = (x, y)$ eine Tracertrajektorie. Dann heißt

$$\mathcal{PM}(\tau) := \int_0^T dt \langle \chi(\tau(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

der Messwert eines Planimeters mit einem um $-(F-f)/F(x-x_0, y-y_0) + \mu/F(-(y-y_0), x-x_0)$ zum Tracer verschobenen Zählrädchen, wobei für $t \in [0, T]$

$$\gamma(t) := \tau(t) - \frac{F-f}{F} \begin{pmatrix} x(t) - x_0(t) \\ y(t) - y_0(t) \end{pmatrix} + \frac{\mu}{F} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_0(t)) \\ x(t) - x_0(t) \end{pmatrix}.$$

Es bezeichnet $(x(t), y(t))$ die Position des Tracers und $(x_0(t), y_0(t)) := (x_0(x(t), y(t)), y_0(x(t), y(t)))$ die dazugehörige Position des Drehpunkts bei $t \in [0, T]$. Für $p \in Z$, $v \in T_p Z$ bezeichnet $\langle \chi(p), v \rangle$ die Auswertung von $\chi(p)$ bei v .

Für eine verschwindende Verschiebung stimmt diese Definition des Messwerts des Planimeters mit (3.2) überein.

3.3 Flächenmessungen mit dem polaren Planimeter

Ziel dieses Abschnitts ist, die Funktionsfähigkeit von polaren Planimetern zu beweisen, d.h. dass der Messwert des Planimeters nach dem Abfahren geeigneter geschlossener Kurven tatsächlich den von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt angibt. Wir zeigen dazu den folgenden Satz.

Satz 22. Die Tracertrajektorie $\tau : [0, T] \rightarrow Z$; $t \mapsto r(t)e^{i\alpha(t)}$ sei eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve und Ω sei das Innere von τ . Die Kurve τ sei positiv orientiert (das heißt beim Durchlaufen von τ liegt der an τ angrenzende Teil von Ω zur Linken) und der Ursprung liege im Äußeren von τ . Dann gilt

$$\mathcal{PM}(\tau) = \int_{\Omega} dx \wedge dy$$

Wir zeigen in Proposition 23 nur für stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurven, dass sie ein Gebiet umschließen, das die Voraussetzungen des Satzes von Green erfüllt. Dies entspricht dem praktischen Anwendungsfall eines polaren Planimeters, bei dem während der Messung der Tracer nicht abgehoben wird - der Rand des stückweise glatten Gebiets also aus einer einzigen Kurve besteht. Dennoch zeigt dies die allgemeine Gültigkeit des Funktionsprinzips, da der Rand beliebiger stückweise glatter, beschränkter Gebiete in \mathbb{R}^2 durch endlich viele disjunkte Jordankurven gegeben ist, siehe auch [AE08b, p. 452]. Der Flächeninhalt eines beliebigen, stückweise glatten Gebiets in \mathbb{R}^2 lässt sich also durch endlich viele Einzelmessungen bestimmen, deren Korrektheit wir hier zeigen. Lemma 24 impliziert, dass χ eingesetzt in die linke Seite von (2.1) bei Anwendung des Satzes von Green in $dx \wedge dy$ überführt wird. Danach sind wir bereit, Satz 22 zu zeigen.

Proposition 23. Das Innere einer stückweise glatten, stückweise regulären Jordankurve γ ist ein beschränktes, stückweise glattes Gebiet in \mathbb{R}^2 .

Beweis. Wir bezeichnen mit Ω das Innere von γ . Aus der Definition folgt direkt, dass Ω beschränkt, zusammenhängend und nichtleer ist. Außerdem ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\gamma)$ offen, da nach Satz 5 der Rand von Ω durch $\text{Bild}(\gamma)$ gegeben ist und Ω ihn daher nicht schneidet. Ω ist also ein beschränktes, nicht-leeres Gebiet.

Da γ stückweise glatt ist, gibt es eine Zerlegung $0 = t_0 < \dots < t_N = T$ von $[0, T]$, sodass für $0 \leq i \leq N - 1$ $\tilde{\gamma}_i := \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^1([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R}^2) \cap C^\infty((t_i, t_{i+1}), \mathbb{R}^2)$. O.B.d.A. seien die t_i so gewählt, dass γ an t_1, \dots, t_{N-1} tatsächlich nicht glatt ist und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \searrow 0} \gamma^{(k)}(t) = \lim_{t \nearrow T} \gamma^{(k)}(t),$$

also in einer Umgebung von $\gamma(0)$ eine glatte Parametrisierung existiert. Durch die orientierungserhaltenden Umparametrisierungen $\phi_i : [-1, 1] \rightarrow [t_i, t_{i+1}] \quad t \mapsto t_{i+1} \frac{1+t}{2} + t_i \frac{1-t}{2}$ erhält man

$$\gamma_i := \tilde{\gamma}_i \circ \phi_i \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^2) \cap C^\infty((-1, 1), \mathbb{R}^2) \quad , 0 \leq i \leq N - 1.$$

Und wir definieren für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$

$$\gamma_N : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma(T + \epsilon t) & \text{falls } t \leq 0 \\ \gamma(\epsilon t) & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}.$$

Wegen der Existenz einer glatten Parametrisierung in einer Umgebung von $\gamma(0)$ ist auch $\gamma_0 \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^2) \cap C^\infty((-1, 1))$. Wir zeigen nun, dass dies passende Funktionen im Sinne von Definition 2 sind, d.h. dass sie die Bedingungen (i)-(iii) erfüllen. Die Bedingung (iii) ist erfüllt, da die Vereinigung der Bilder von γ_i per Konstruktion gerade dem Bild von γ entspricht. Für die anderen beiden Bedingungen bestimmen wir zunächst $\text{Rd}(\bar{\Omega})$. Wir gehen davon aus, dass in keiner Umgebung von $\gamma(t_i)$ mit $1 \leq i < N$ eine glatte Parametrisierung von γ existiert.

Es gilt $M_{\bar{\Omega}} = \bar{\Omega} \setminus \{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$.

Für $p \in \Omega$ existiert ein Ball V_p , der komplett in Ω liegt. Also ist V_p eine offene Umgebung von p in $\bar{\Omega}$ und $\bar{\Omega} \cap V_p = V_p$. V_p ist aber eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von sich selbst.

Für $p \in \partial\Omega$ unterscheiden wir drei Fälle.

1. Fall: $p \in \partial\Omega \setminus \{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$

Dann gibt es $0 \leq i \leq N-1$, $t \in (t-\epsilon, t+\epsilon) \subseteq (t_i, t_{i+1})$, sodass $p = \gamma(t) = \tilde{\gamma}_i(t)$. Da $\gamma|_{[0, T] \setminus (t-\epsilon, t+\epsilon)}$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt ist und $\tilde{\gamma}_i(t) \notin \gamma|_{[0, T] \setminus (t-\epsilon, t+\epsilon)}$ wegen der Injektivität von γ auf $[0, T]$, ist

$$\text{dist}(\gamma(t), \gamma([0, T] \setminus (t_i, t_{i+1}))) > 0. \quad (*)$$

Die Kurve $\gamma((t-\epsilon, t+\epsilon))$ ist aber für hinreichend kleine ϵ eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . Dies folgt mit dem Satz von der Umkehrfunktion, weil $\gamma|_{(t-\epsilon, t+\epsilon)}$ für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ regulär, glatt und injektiv ist.

Es gibt also eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $\gamma(t)$, eine offene Menge $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen C^∞ -Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow \hat{U}$, sodass $\phi(U \cap \gamma((t-\epsilon, t+\epsilon))) = \hat{U} \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Wegen (*) können wir O.B.d.A. annehmen, dass $U \cap \gamma([0, T] \setminus (t-\epsilon, t+\epsilon)) = \emptyset$ und somit $\phi(U \cap \text{Bild}(\gamma)) = \hat{U} \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Durch Schrumpfen von \hat{U} können wir zusätzlich annehmen, dass \hat{U} ein offener Ball vom Radius $\epsilon > 0$ um $\phi(p)$ ist. $\hat{U} \setminus \phi((U \cap \text{Bild}(\gamma)))$ hat also genau zwei Zusammenhangskomponenten, welche durch halbe offene Bälle $B_1 = \hat{U} \cap \{y > 0\}$ und $B_2 = \hat{U} \cap \{y < 0\}$ gegeben sind. Wegen

$$\hat{U} \setminus \phi(U \cap \text{Bild}(\gamma)) \stackrel{\phi \text{ bijektiv}}{=} \phi(U \setminus (U \cap \text{Bild}(\gamma))) = \phi(U \setminus \text{Bild}(\gamma))$$

und weil ϕ ein Diffeomorphismus und Zusammenhang eine topologische Invariante ist, hat $U \setminus \text{Bild}(\gamma)$ auch genau zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $H_i := \phi^{-1}(B_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Da $\text{Bild}(\gamma)$ der topologische Rand der offenen Menge Ω ist (und sich somit nicht mit dieser schneidet), enthält Ω mindestens einen Punkt aus H_1 oder H_2 . O.B.d.A. enthält Ω einen Punkt aus H_1 . Tatsächlich gilt sogar $H_1 \subseteq \bar{\Omega}$, denn sonst gälte $H_1 \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset \neq H_1 \cap \bar{\Omega}$. Wäre in dieser Situation $H_1 \cap \partial\bar{\Omega} = \emptyset$, so folgte

$$H_1 = (H_1 \cap \Omega) \cup \underbrace{(H_1 \cap \partial\bar{\Omega})}_{=\emptyset} \cup (H_1 \setminus \bar{\Omega}) = \underbrace{(H_1 \cap \Omega)}_{\neq \emptyset, \text{ offen}} \cup \underbrace{(H_1 \setminus \bar{\Omega})}_{\neq \emptyset, \text{ offen}}.$$

Dies wäre ein Widerspruch dazu, dass H_1 zusammenhängend ist. Es gälte also $H_1 \cap \partial\bar{\Omega} \neq \emptyset$. Dies wäre jedoch ein Widerspruch zu $H_1 \subseteq U \setminus \text{Bild}(\gamma) = U \setminus \partial\bar{\Omega}$. Daher muss $H_1 \subseteq \bar{\Omega}$ gelten. Mit dem gleichen Argument würde aus $H_2 \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ folgen, dass $H_2 \subseteq \bar{\Omega}$. Dies würde aber implizieren, dass $U = (U \setminus \partial\bar{\Omega}) \cup \partial\bar{\Omega} = H_1 \cup H_2 \cup \partial\bar{\Omega} \subseteq \bar{\Omega}$. Somit wäre $p \in \Omega$, was ein Widerspruch ist. Also muss $U \cap \bar{\Omega} = U \setminus H_2$ gelten. Es folgt

$$\phi(U \cap \bar{\Omega}) = \phi(U \setminus H_2) \stackrel{\phi \text{ bijektiv}}{=} \hat{U} \setminus \phi(H_2) = \hat{U} \setminus B_2 = \hat{U} \cap \{y \geq 0\}.$$

Mit $V_p := U$ ist also $V_p \cap \bar{\Omega}$ eine berandete glatte Untermannigfaltigkeit von V_p , also $p \in M_{\bar{\Omega}}$.

2. Fall: $p = \gamma(t_0)$

Dieser Fall folgt analog zum ersten Fall unter Verwendung von γ_N an Stelle von γ_i , $0 \leq i \leq N-1$ geeignet.

3. Fall: $p \in \{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$

Wäre $p := \gamma(t_i) \in M_{\overline{\Omega}}$ für ein $0 < i < N$, so gäbe es eine offene Umgebung V_p von p , sodass $V_p \cap \overline{\Omega}$ eine 2-dimensionale (berandete) glatte Untermannigfaltigkeit von V_p , also auch von \mathbb{R}^2 . Die Berandung wäre gegeben durch $V_p \cap \partial\overline{\Omega} = \gamma((t_i - \epsilon_1, t_i + \epsilon_2))$ gegeben für geeignete ϵ_1, ϵ_2 . Der Rand einer 2-dimensionalen glatten Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist jedoch selbst eine 1-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 . Da jedoch keine glatte Parametrisierung von γ in einer Umgebung von $\gamma(t_i)$ gibt, ist $\gamma((t_i - \epsilon_1, t_i + \epsilon_2))$ keine *glatte* Untermannigfaltigkeit.

Wir haben gezeigt, dass $M_{\overline{\Omega}} = \overline{\Omega} \setminus \{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$ und, dass $\text{Rd}(\overline{\Omega}) = \text{Bild}(\gamma) \setminus \{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$. Betrachtet man erneut $\gamma_0, \dots, \gamma_N$, sieht man freilich, dass für $0 \leq i \leq N$ in $\gamma_i((-1, 1)) \subseteq \partial\Omega$ die Punkte $\{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$ nicht enthalten sind, jedoch alle anderen Punkte aus $\partial\Omega$. Damit sind auch die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt.

Für den Fall, dass in einer Umgebung von Punkten aus $\{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{N-1})\}$ eine glatte Parametrisierung existiert, verfahren wir mit ihnen analog zu $\gamma(t_0)$. Diese Punkte liegen dann nicht in der Singularitätenmenge von $\overline{\Omega}$. \square

Lemma 24. Sei $(x_0, y_0) : Z \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Drehpunkt als Funktion der Tracerposition (x, y) . Dann gilt

$$\forall (x, y) \in Z : \frac{\partial x_0}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial y_0}{\partial y}(x, y) = 1.$$

Beweis. Der Beweis folgt der Beweisskizze aus [Egg20, p. 109]. Die stetige Differenzierbarkeit von x_0, y_0 wurde bereits zuvor festgestellt. Es gilt außerdem

$$x_0^2 + y_0^2 = \|(x_0, y_0)\|^2 = P^2.$$

Da (x_0, y_0) derart gewählt wurde, dass $(x, y) = (x_0, y_0) + F e^{i(\theta+\alpha)}$ für geeignete $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$, gilt auch

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = F^2.$$

Durch Ableiten dieser Gleichungen nach x und y folgt

$$\begin{aligned} x_0 \frac{\partial x_0}{\partial x} + y_0 \frac{\partial y_0}{\partial x} &= 0, & x_0 \frac{\partial x_0}{\partial y} + y_0 \frac{\partial y_0}{\partial y} &= 0, \\ x \frac{\partial x_0}{\partial x} + y \frac{\partial y_0}{\partial x} &= x - x_0, & x \frac{\partial x_0}{\partial y} + y \frac{\partial y_0}{\partial y} &= y - y_0. \end{aligned}$$

Diese vier Gleichungen können geschrieben werden als das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & y_0 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & y_0 \\ x & 0 & y & 0 \\ 0 & x & 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x} \\ \frac{\partial x_0}{\partial y} \\ \frac{\partial y_0}{\partial x} \\ \frac{\partial y_0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Man sieht leicht, dass die Koeffizientenmatrix genau dann vollen Rang hat, wenn (x_0, y_0) und (x, y) linear unabhängig sind. Dies ist für $(x, y) \in Z$ immer der Fall, da Tracer und Drehpunkt nur genau dann auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden (durch den Pol) liegen, wenn der Fahrarm vollständig ein- oder ausgeklappt ist. Das LGS besitzt die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial x} &= -\frac{y_0(x-x_0)}{x_0y-xy_0}, & \frac{\partial x_0}{\partial y} &= -\frac{y_0(y-y_0)}{x_0y-xy_0}, \\ \frac{\partial y_0}{\partial x} &= \frac{x_0(x-x_0)}{x_0y-xy_0}, & \frac{\partial y_0}{\partial y} &= \frac{x_0(y-y_0)}{x_0y-xy_0}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial x_0}{x} + \frac{\partial y_0}{y} = -\frac{y_0(x-x_0)}{x_0y-xy_0} + \frac{x_0(y-y_0)}{x_0y-xy_0} = \frac{-y_0x + x_0y_0 + x_0y - x_0y_0}{x_0y-xy_0} = \frac{-y_0x + x_0y}{x_0y-xy_0} = 1. \quad \square$$

Nun sind wir bereit zu zeigen, dass der Messwert des Planimeters nach dem Abfahren einer stückweise glatten, stückweise regulären Jordankurve dem Flächeninhalt des Inneren der Kurve entspricht.

Beweis von Satz 22. Wir zeigen die Aussage zunächst für den Spezialfall, dass das Zählrädchen sich am Tracer befindet. Es gilt dann

$$\mathcal{PM}(\tau) = F \int_{\tau} -\frac{y-y_0}{F} dx + \frac{x-x_0}{F} dy = \int_{\tau} -y dx + x dy + \int_{\tau} y_0 dx - x_0 dy.$$

Weil Ω ein beschränktes, stückweise glattes Gebiet in \mathbb{R}^2 ist und Z eine offene Umgebung von $\bar{\Omega} = \Omega \cup \text{Bild}(\tau)$ ist und x, y, x_0, y_0 hinreichend glatt in Z sind, können wir den Satz von Green anwenden und erhalten

$$\mathcal{PM}(\tau) = \int_{\Omega} 1 - (-1) dx \wedge dy + \int_{\Omega} -\left(\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$\stackrel{\text{Lemma 24}}{=} 2 \int_{\Omega} dx \wedge dy - \int_{\Omega} dx \wedge dy = \int_{\Omega} dx \wedge dy.$$

Nun betrachten wir den Fall, dass das Zählrädchen eine Verschiebung zum Tracer aufweist. Mit der Definition für γ aus 3.3 ist der Messwert des Zählrädchens

$$\begin{aligned} \mathcal{PM}(\tau) &= F \int_0^T dt \langle \chi(\tau(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = F \underbrace{\int_0^T dt \langle \chi(\tau(t)), \dot{\tau}(t) \rangle}_{=:\int_{\tau} \chi} \\ &\quad + F \underbrace{\int_0^T dt \left\langle \chi(\tau(t)), -\left(F-f\right) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\theta(t) + \alpha(t)) \\ \sin(\theta(t) + \alpha(t)) \end{pmatrix} \right\rangle}_{=:I} \\ &\quad + F \underbrace{\int_0^T dt \left\langle \chi(\tau(t)), \mu \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t) + \alpha(t)) \\ \cos(\theta(t) + \alpha(t)) \end{pmatrix} \right\rangle}_{=:II}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Terme I und II jeweils verschwinden.

Zu I :

Da τ stückweise glatt ist, sind auch θ und α stückweise glatt, es folgt

$$\begin{aligned} I &= -(F - f) \int_0^T dt (\dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)) [\sin(\theta(t) + \alpha(t)) \sin(\theta(t) + \alpha(t)) + \cos(\theta(t) + \alpha(t)) \cos(\theta(t) + \alpha(t))] \\ &= -(F - f) \int_0^T dt \dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t) = -(F - f) [(\theta(T) - \theta(0)) - (\alpha(T) - \alpha(0))]. \end{aligned}$$

Da θ nur vom Ort des Tracers abhängt und τ geschlossen ist, gilt $(\theta(T) - \theta(0)) = 0$. Da sich der Ursprung per Voraussetzung im Äußeren von τ befindet, hat τ die Windungszahl $\text{Ind}_\tau(0) = 0$ in Bezug auf den Ursprung (siehe Satz 3.5.1 in [Fre18]), also muss auch $(\alpha(T) - \alpha(0)) = 0$ gelten, womit I verschwindet.

Zu II :

$$\begin{aligned} II &= \mu \int_0^T dt (\dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)) [\sin(\theta(t) + \alpha(t)) \cos(\theta(t) + \alpha(t)) - \cos(\theta(t) + \alpha(t)) \sin(\theta(t) + \alpha(t))] \\ &= \mu \int_0^T dt (\dot{\theta}(t) + \dot{\alpha}(t)) 0 = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung 25. Am Beweis von Satz 22 kann man sehen, dass der Messwert des Planimeters zu einer Tracertrajektorie τ auch geschrieben werden kann als

$$\mathcal{PM}(\tau) = F \int_\tau \chi' \quad \text{mit} \quad \chi' = \chi - (F - f)(d\theta + d\alpha)$$

wobei $d\alpha := \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$. Man bemerke, dass $d\alpha$ trotz der suggestiven Notation nicht das Differential einer Funktion ist, da die Phase α auf Z nicht wohldefiniert ist. Weichen Tracer und Position des Zählrädchens also voneinander ab, bewirkt dies eine veränderte 1-Form zur Beschreibung des Zählrädchens. Sie unterscheidet sich von χ nur durch eine 1-Form, die auf Ebenen, geschlossenen C^1 -Kurven τ mit $\text{Ind}_\tau(0) = 0$ zu 0 integriert. Es gilt $\text{Ind}_\tau(0) = 0$, wenn der Ursprung/Pol sich im Äußeren von τ befindet (siehe Satz 3.5.1 in [Fre18]). Der Messwert des Planimeters ist dann also unabhängig von der Position des Zählrädchens. Befindet sich der Pol im Inneren von τ , gilt dies nicht.

Außerdem stellen wir fest, dass eine Verschiebung senkrecht zum Fahrarm keinesfalls einen Einfluss auf den Messwert hat.

3.4 Neutraler Kreis und Messungen mit Pol innerhalb der Fläche

In Satz 22 haben wir gefordert, dass der Ursprung im Äußeren der Tracertrajektorie τ liegt, wobei τ eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve ist. Somit wird sichergestellt, dass Z eine offene Umgebung von $\bar{\Omega} = \Omega \cup \text{Bild}(\tau)$ ist. Da χ beziehungsweise χ' auf Z glatt ist, ist also garantiert, dass χ beziehungsweise χ' auf einer offenen Umgebung von $\bar{\Omega}$ glatt ist und somit der Satz von Green angewendet werden kann. Tatsächlich ist die Forderung, dass der Pol im Äußeren von τ liegt, notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 26. Wir betrachten ein Planimeter, dessen Zählrädchen sich am Tracer befindet. Die Tracertrajektorie τ sei gegeben durch eine Kreislinie mit Radius $R_N := \sqrt{P^2 - F^2}$

$$\tau : [0, 2\pi] \rightarrow Z; \quad t \mapsto (x, y)(t) = \tau(t) = R_N e^{it},$$

ein sogenannter neutraler Kreis. Die Kurve τ ist eine glatte, reguläre Jordankurve in Z . Das Innere von τ ist $B_{R_N}(0)$. Der Ursprung liegt also insbesondere nicht im Äußeren von τ und τ ist positiv orientiert. Man überprüft leicht, dass durch

$$\phi(t) := \arcsin\left(\frac{F}{P}\right) \quad \text{und} \quad \theta(t) := -\frac{\pi}{2}$$

die im Sinne von Lemma 16 zu τ gehörigen Parameterkurven gegeben sind. Für den Messwert des Planimeters folgt dann

$$\mathcal{PM}(\tau) = F \int_0^{2\pi} dt \langle \cos t \, dx + \sin t \, dy, R_N(-\sin t, \cos t)^T \rangle = F R_N \int_0^{2\pi} dt \, 0 = 0.$$

Aber es gilt

$$\int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy = \pi R_N^2 \neq 0.$$

Im Extremfall kann es also passieren, dass das Planimeter eine Fläche überhaupt nicht „wahrnimmt“. Wir haben hier ein Beispiel für den neutralen Kreis eines Planimeters gesehen, das heißt einer Kreislinie in Z um den Ursprung, bei deren Abfahren das Planimeter einen Flächeninhalt von 0 misst. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zählrädchenachse beziehungsweise der Fahrarm parallel zur Tangente der Kreislinie, die das Zählrädchen abfährt, steht (siehe Abbildung 3.3). Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass eine abgewandelte Form von Satz 22 gilt, falls sich der Pol im Inneren von τ befindet, sodass Flächenmessungen auch in diesem Fall weiter möglich sind.

Satz 27. Sei τ eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve in Z und Ω das Innere von τ . τ sei positiv orientiert und R_N der Radius des neutralen Kreises des Planimeters. Der Ursprung liege in Ω . Dann gilt

$$\mathcal{PM}(\tau) = \int_{\Omega} dx \wedge dy - \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy. \quad (3.5)$$

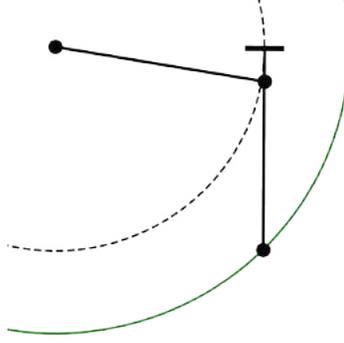


Abbildung 3.3: Polares Planimeter beim Abfahren seines neutralen Kreises. Der neutrale Kreis ist in grün abgebildet, in gestrichelten Linien der Kreis, den das Zählrädchen dabei abfährt. Es fällt auf, dass das Zählrädchen stets senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung steht.

Zur Vorbereitung zeigen wir in Proposition 29, dass jedes halbwegs vernünftig entworfene Planimeter genau einen neutralen Kreis besitzt. Dies rechtfertigt die obige Formulierung von Satz 27. Anschließend zeigen wir in Lemma 30 die Aussage zunächst für den Fall, dass τ_R eine Kreislinie vom Radius $R > 0$ in Z um den Ursprung ist. Für hinreichend große Radien kann der Satz von Green auf $B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$ angewendet werden, um den Flächeninhalt von $B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$ mit den Planimetermesswerten $\mathcal{PM}(\tau_R)$ und $\mathcal{PM}(\tau)$ in Verbindung zu setzen. Mithilfe von Lemma 30 eliminieren wir schließlich $\mathcal{PM}(\tau_R)$ um zur Aussage von Satz 27 zu gelangen.

Definition 28 (neutraler Kreis). Ein Kreis $\partial B_R(0) \subseteq Z$, $R \in (P - F, P + F)$ mit Parametrisierung τ heißt *neutraler Kreis*, falls

$$\mathcal{PM}(\tau) = \int_{\tau} \chi' = 0.$$

Proposition 29. Zu einem Planimeter mit $f \in (-P, P)$ gibt es einen eindeutigen neutralen Kreis. Dieser hat den Radius

$$R_N = \sqrt{(F - f)^2 + P^2 - f^2} \in (P - F, P + F). \quad (3.6)$$

Für $f > \frac{F^2 + P^2}{2F}$ hat das Planimeter keinen neutralen Kreis.

Beweis. Sei $R \in (P-F, P+F)$ der Radius eines neutralen Kreises und $\tau_R : [0, 2\pi] \rightarrow Z$; $t \mapsto R e^{it}$. Dies ist äquivalent zu

$$0 = \int_{\tau_R} \chi' \stackrel{\text{Def.}}{=} \chi' \int_0^{2\pi} dt \langle \chi(\tau_r(t)), \dot{\tau}_R(t) \rangle - (F-f) \left[\underbrace{\int_{\tau_R} d\theta}_{=0, \text{ da } \tau_R \text{ geschl.}} + \underbrace{\int_{\tau_R} d\alpha}_{=2\pi} \right]$$

$$= R \int_0^{2\pi} dt \left\langle -\sin(\theta(t)+t) dx + \cos(\theta(t)+t) dy, \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\rangle - 2\pi(F-f)$$

$$\Leftrightarrow (F-f)2\pi = R \int_0^{2\pi} dt \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)+t) \\ \cos(\theta(t)+t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle}_{=\cos \theta(t)}$$

$$\stackrel{\text{Bem. 17}}{\Leftrightarrow} F-f = R \cos \left(-\arccos \left(\frac{R^2 + F^2 - P^2}{2FR} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow R^2 = F^2 - 2Ff + P^2 = (F-f)^2 + P^2 - f^2.$$

Diese Gleichung hat maximal eine nichtnegative reelle Lösung, im Falle der Existenz ist diese durch $R = \sqrt{(F-f)^2 + P^2 - f^2}$ gegeben. Sie existiert genau dann, wenn $f \leq \frac{F^2+P^2}{2F}$ und liegt in $(P-f, P+f)$ genau dann, wenn $f \in (-P, P)$. \square

Wir nehmen von nun an eine Situation an, in der ein neutraler Kreis mit Radius $R_N \in (P-F, P+F)$ für das Planimeter existiert, das heißt $|f| < P$.

Lemma 30. Sei $R \in (P-F, P+F)$ und R_N der Radius des neutralen Kreises. Dann gilt für den Planimetermesswert zur Tracertrajektorie $\tau : [0, 2\pi] \rightarrow Z$; $t \mapsto R e^{it}$

$$\mathcal{PM}(\tau) = \int_{B_R(0)} dx \wedge dy - \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy. \quad (3.7)$$

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall: $R = R_N$

Dann ist nichts zu zeigen.

2. Fall: $R > R_N$

Für $r \in (P-F, P+F)$ definieren wir $\tau_r : [0, 2\pi] \rightarrow Z$ $t \mapsto r e^{it}$ und $\tau_r^-(t) := \tau_r(2\pi - t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Die Menge $B_R(0) \setminus \bar{B}_{R_N}(0)$ ist ein beschränktes, (stückweise) glattes Gebiet mit Berandung $\partial B_R(0) \cup \partial B_{R_N}(0)$.

Dies kann mithilfe des Satzes vom regulären Wert (vgl. [AE08b] Satz XI.1.15) angewendet auf

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \left(\|x\| - \frac{R + R_N}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{R - R_N} \right)^2$$

am Wert 1 leicht nachgeprüft werden. Für $B_R(0) \setminus \overline{B_{R_N}(0)}$ gilt die Aussage von Satz 22 ganz analog. Es ist nämlich Z eine offene Umgebung von $B_R(0) \setminus \overline{B_{R_N}(0)}$, damit gilt, falls sich das Zählrädchen am Tracer befindet,

$$\mathcal{PM}(\tau) \stackrel{\text{neutr. Kreis}}{=} \mathcal{PM}(\tau_R) - \mathcal{PM}(\tau_{R_N}) = \mathcal{PM}(\tau_R) + \mathcal{PM}(\tau_{R_N}^-) = \int_{\tau_R} \chi' + \int_{\tau_{R_N}^-} \chi'$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{B_R(0) \setminus \overline{B_{R_N}(0)}} dx \wedge dy = \int_{B_R(0) \setminus B_{R_N}(0)} dx \wedge dy = \int_{B_R(0)} dx \wedge dy - \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy.$$

Da τ_R und τ_{R_N} jeweils glatte, reguläre Jordankurven sind, folgt mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 22, dass $\mathcal{PM}(\tau_R)$ und $\mathcal{PM}(\tau_{R_N})$ unabhängig von der Verschiebung des Tracers sind. Damit gilt die obige Aussage auch dann, wenn sich das Zählrädchen nicht am gleichen Ort wie der Tracer befindet.

3. Fall: $R < R_N$

Analog zum zweiten Fall erhält man für den Planimetermesswert (bei möglicherweise verschobenem Zählrädchen)

$$\begin{aligned} -\mathcal{PM}(\tau) &= \mathcal{PM}(\tau_R^-) = \mathcal{PM}(\tau_{R_N}) + \mathcal{PM}(\tau_R^-) = \int_{B_{R_N}(0) \setminus \overline{B_R(0)}} dx \wedge dy \\ &= \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy - \int_{B_R(0)} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 27. Da $\text{Bild}(\tau) \subseteq Z$ und $\partial B_{P+F}(0)$ kompakt und disjunkt sind, ist

$$\text{dist}(\text{Bild}(\tau), \partial B_{P+F}(0)) > 0.$$

Es gibt also $P - F < r < R < P + F$, sodass $\text{Bild}(\tau) \subseteq B_r(0) \subseteq B_R(0)$. Wir zeigen zunächst, dass $M := B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$ ein beschränktes, stückweise glattes Gebiet in \mathbb{R}^2 mit Berandung $\text{Rd}(\overline{M}) = \partial B_R(0) \cup \text{Rd}(\overline{\Omega})$.

Um zu sehen, dass M nichtleer ist, zeigen wir, dass $\Omega \subseteq B_r(0)$. Es folgt dann für M , dass $M = B_R(0) \setminus \overline{\Omega} \supseteq B_R(0) \setminus B_r(0) \neq \emptyset$. Angenommen es gäbe $x \in \Omega$ mit $\|x\| > r$. Dann wäre $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\|x\|}(0)$ unbeschränkt und zusammenhängend und $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\|x\|}(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\tau)$, da $\text{Bild}(\tau) \subseteq B_r(0) \subseteq B_{\|x\|}(0)$. $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\|x\|}(0)$ und Ω wären also nicht disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\tau)$, da x in ihnen enthalten wäre. Da Ω per Definition eine Zusammenhangskomponente

von $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\tau)$ ist, gälte $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\|x\|}(0) \subseteq \Omega$, womit Ω unbeschränkt wäre. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass Ω beschränkt ist.

Um zu zeigen, dass M zusammenhängend ist, stellen wir fest, dass \mathbb{R}^2 lokal wegzusammenhängend ist und daher zusammenhängende Mengen automatisch wegzusammenhängend sind. Das Äußere von τ , $B := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ ist also wegzusammenhängend. Seien $x, y \in M$.

Falls $\|x\|, \|y\| \geq r$ gibt es einen Weg in $B_R(0) \setminus B_r(0) \subseteq B_R(0) \setminus \overline{\Omega} = M$ von x nach y .

Ist dies nicht der Fall, ist O.B.d.A. $\|x\| < r$. Sei $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ ein Weg von x nach y in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Wir unterscheiden dann zwei Fälle.

1. Fall: $\text{Bild}(\gamma)$ liegt vollständig in $\overline{B}_r(0)$

Dann ist nichts zu zeigen.

2. Fall: $\text{Bild}(\gamma)$ liegt nicht vollständig in $\overline{B}_r(0)$

Da $\|\gamma\|$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $\emptyset \neq \|\gamma\|^{-1}(\{r\})$ und $\|\gamma\|^{-1}(\{r\})$ ist als stetiges Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Zudem ist $\|\gamma\|^{-1}(\{r\})$ beschränkt, also kompakt. Es gibt also ein minimales und ein maximales $t_{min}, t_{max} \in \|\gamma\|^{-1}(\{r\})$.

Dann ist $\gamma_1 := \gamma|_{[0, t_{min}]}$ ein Weg von x nach $\gamma(t_{min})$ in $\overline{B}_r(0) \setminus \overline{\Omega} \subseteq B_R(0) \setminus \overline{\Omega} = M$.

Wir schreiben $\gamma(t_{min}) = re^{i\phi_{min}}$ und $\gamma(t_{max}) = re^{i\phi_{max}}$ für geeignete $\phi_{min}, \phi_{max} \in [-\pi, \pi]$. Dann ist $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \partial B_r(0) \quad t \mapsto e^{i(\phi_{max} - \phi_{min})t} \gamma(t_{min})$ ein Weg von $\gamma(t_{min})$ nach $\gamma(t_{max})$ in $\partial B_r(0) \subseteq M$.

Ist nun $\|y\| < r$, dann ist $\gamma_3 := \gamma|_{[t_{max}, T]}$ ein Weg von $\gamma(t_{max})$ nach y in $\overline{B}_r(0) \setminus \overline{\Omega} \subseteq B_R(0) \setminus \overline{\Omega} = M$. Ist $\|y\| = r$, so ist $t_{max} = T$, also $\gamma(t_{max}) = \gamma_2(1) = y$.

Ist $\|y\| > r$, so sind $\gamma(t_{max}), y \in B_R(0) \setminus B_r(0)$, also gibt es einen Weg γ_3 von $\gamma(t_{max})$ nach y in $B_R(0) \setminus B_r(0) \subseteq B_R(0) \setminus \overline{\Omega} = M$.

Man sieht nun leicht, dass $\gamma_1 * \gamma_2$ ein Weg von x nach y in M ist, falls $\|y\| = r$ und $\gamma_3 * \gamma_2 * \gamma_1$, falls $\|y\| \neq r$. Hierbei bezeichnet $*$ die Konkatenation. M ist somit zusammenhängend. Wir haben also gezeigt, dass M ein nichtleeres Gebiet ist. Die übrigen Eigenschaften eines stückweise glatten Gebiets und die Gestalt der Berandung und Singularitätenmenge können analog zum Beweis von Proposition 23 gezeigt werden, da die beiden Teilrandkurven $\text{Bild}(\tau)$ und $\partial B_R(0)$ als disjunkte Kompakta stets einen endlichen „Mindestabstand“ haben.

Da Z eine offene Umgebung von

$$\overline{B_R(0) \setminus \overline{\Omega}} = (B_R(0) \setminus \overline{\Omega}) \cup \partial((B_R(0) \setminus \overline{\Omega})) = (B_R(0) \setminus \overline{\Omega}) \cup (\partial B_R(0) \cup \text{Bild}(\tau)) = \overline{B}_R(0) \setminus \Omega$$

ist und χ glatt auf Z ist, können wir den Satz von Green anwenden.

Z ist eine offene Umgebung von $B_R(0) \setminus \Omega$, da $\overline{B}_R(0) \setminus \Omega \subseteq B_{P+F}(0)$ und sich $B_{P-F}(0)$ nicht mit dem Äußeren von τ schneidet, da sonst nach dem Kleeblattlemma $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bild}(\tau)$ nur eine Zusammenhangskomponente hätte, und sich per Voraussetzung nicht mit $\text{Bild}(\tau)$ schneidet.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathcal{PM}(\tau_R) - \mathcal{PM}(\tau) &= \int_{\tau_R} \chi' - \int_{\tau} \chi' = \int_{\tau_R} \chi - (F - f)2\pi - \int_{\tau} \chi + (F - f)2\pi \\
&= \int_{\tau_R} \chi + \int_{\tau^-} \chi \stackrel{\text{Green}}{=} \int_{B_R(0) \setminus \bar{\Omega}} dx \wedge dy = \int_{B_R(0)} dx \wedge dy - \int_{\Omega} dx \wedge dy \\
&\stackrel{\text{Lemma 30}}{=} \mathcal{PM}(\tau_R) + \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy - \int_{\Omega} dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Die fünfte Gleichung gilt, da stückweise C^1 -Kurven in \mathbb{R}^2 eine verschwindende Fläche haben. Die zweite Gleichung folgt daraus, dass τ_r und τ bezüglich einem Punkt in ihrem Inneren Windungszahl 1 gemäß Beispiel 3.4.3 in [Fre18] besitzen. τ_R bezeichnet die Parametrisierung $\tau_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ des Kreises mit Radius R und Mittelpunkt 0. Es folgt also die Behauptung

$$\mathcal{PM}(\tau) = \int_{\Omega} dx \wedge dy - \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy.$$

□

3.5 Fehlerkompensation mit kompensierenden polaren Planimetern

Bisher sind wir stets davon ausgegangen, dass die Achse des Zählrädchens parallel zum Fahrarm ausgerichtet ist. Diese Annahme kann in der Praxis jedoch nie perfekt erfüllt sein. Deshalb soll in diesem Abschnitt untersucht werden, wie die dadurch entstehenden Fehler kompensiert werden können.¹

Um einer (hoffentlich geringfügig) von der idealen Ausrichtung abweichenden Zählrädchenachse Rechnung zu tragen, erweitern wir Definition 21. Wir stellen zunächst fest, dass eine beliebige 1-Form ω mit $\|\omega\| = 1$ geschrieben werden kann als

$$\omega = \cos \beta \chi - \sin \beta \rho$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$ und $\rho := \frac{x-x_0}{F} dx + \frac{y-y_0}{F} dy$. Wir modellieren ein Zählrädchen mit beliebiger aber fester Achsenausrichtung also mithilfe der obigen Gleichung. Anschaulich steht β für den Winkel, um den die Zählrädchenachse von der idealen Ausrichtung abweicht. Eine zusätzliche Skalierung ist nicht notwendig (und nicht erlaubt), da sich die Oberfläche des Zählrädchens maximal mit dessen Bewegungsgeschwindigkeit abrollt, dies ist genau dann der Fall, wenn seine Bewegung senkrecht auf der Achse des Zählrädchens steht. In der Operatornorm gilt also in jedem Fall $\|\omega\| = 1$, wenn ω eine das Zählrädchen beschreibende 1-Form ist. Wir erweitern Definition 21 um nicht parallel zum Fahrarm ausgerichtete Zählrädchenachsen.

¹Die Eigenschaft, eine solche Fehlerkompensation bei der Messung zu erlauben ist namensgebend für *kompensierende* polare Planimeter.

Definition 31. Sei $\tau : [0, T] \rightarrow Z$ eine Tracertrajektorie, γ die gemäß Definition 21 verschobene Kurve und $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist der *Messwert des Planimeters* definiert als

$$\mathcal{PM}(\tau) := F \int_0^T dt \langle \cos \beta \chi(\tau(t)) - \sin \beta \rho(\tau(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = F \cos \beta \int_{\tau} \chi' - F \sin \beta \int_0^T dt \langle \rho(\tau(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Für $\beta = 0$ stimmt diese Definition mit der bisherigen Definition 21 überein.

Wir wissen bereits, dass $\int_{\tau} \chi'$ nur von der von τ eingeschlossenen Fläche (und gegebenenfalls dem neutralen Kreis des Planimeters) abhängt, falls τ eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve in Z ist. Der zweite Term der obigen Definition kann jedoch in anderer Weise von τ abhängen.

Wie wir zu Beginn des Kapitels in Abschnitt 3.1 festgestellt haben, gibt es zwei mögliche Abbildungen, um die Position des Drehpunkts in Abhängigkeit von der Position des Tracers beschreiben. Diese bezeichnen wir für den Rest dieses Kapitels mit $(x_{0,\pm}, y_{0,\pm})$. Der Index „+“ kennzeichnet, dass von derjenigen Abbildung die Rede ist bei der ϕ positive (und θ negative) Werte annimmt, der Index „-“ steht für die Abbildung mit umgekehrten Vorzeichen von ϕ beziehungsweise θ . Alle aus diesen Abbildungen abgeleiteten Objekte (wie etwa χ, χ', ρ, \dots) verstehen wir ebenso mit den entsprechenden Indizes.

Proposition 32 zeigt, dass ein schiefes Zählrädchen nur einen unwesentlichen Einfluss auf den Messwert des Planimeters hat (siehe Bemerkung 33). Der Beweis basiert auf der Aussage von Lemma 34, dass $(\rho_+ + \rho_-)$ eine exakte 1-Form ist und in der Folge für geschlossene Tracertrajektorien (und nicht senkrecht zum Fahrarm verschobene Zählrädchen) keinen Beitrag leistet.

Proposition 32. Seien die Tracertrajektorie $\tau : [0, T] \rightarrow Z; \quad t \mapsto \tau(t) = (x(t), y(t)) = r(t) e^{i\alpha(t)}$ eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve und γ_{\pm} die dazugehörigen, gemäß Definition 21 verschobenen Kurven, $\beta \in \mathbb{R}$ und Ω das Innere von τ . τ sei positiv orientiert. Wir bezeichnen mit $\mathcal{PM}_{\pm}(\tau) := F \cos \beta \int_{\tau} \chi'_{\pm} - F \sin \beta \int_0^T dt \langle \rho_{\pm}(\tau(t)), \dot{\gamma}_{\pm}(t) \rangle$ die Messwerte des Planimeters in beiden möglichen Stellungen. Dann gilt für den Mittelwert beider Messwerte $\overline{\mathcal{PM}}(\tau) := \frac{1}{2}(\mathcal{PM}_+(\tau) + \mathcal{PM}_-(\tau))$,

falls der Ursprung im Äußeren von τ liegt

$$\overline{\mathcal{PM}}(\tau) = \cos \beta \int_{\Omega} dx \wedge dy$$

und falls der Ursprung im Inneren von τ liegt

$$\overline{\mathcal{PM}}(\tau) = \cos \beta \left[\int_{\Omega} dx \wedge dy - \int_{B_{RN}(0)} dx \wedge dy \right] + \sin \beta F \mu 2\pi.$$

Bemerkung 33. Der Mittelwert beider Messwert in Proposition 32 ist proportional zum Flächeninhalt des Inneren der Tracertrajektorie τ und besitzt keine weiteren Abhängigkeiten von τ . Der Proportionalitätsfaktor lässt sich durch eine passende Kalibrierung des Planimeters (d.h. Anpassung der Fahrarmlänge, siehe Abschnitt 4.3) zu 1 kompensieren. Somit kann das Planimeter selbst bei einer schiefen Achse ohne zusätzliche Fehler betrieben werden.

Liegt der Ursprung im Inneren von τ verändert sich zudem der konstante Term, welcher im Fall einer parallelen Achsausrichtung $B_{R_N}(0)$ entspricht. Da aber auch diese Veränderung nicht weiter von τ abhängt, schränkt dies die Verwendung in der Praxis nicht ein. Bei der Bestimmung der Fläche des neutralen Kreises erhält man schlichtweg einen vom „Idealwert“ abweichenden Wert.

Lemma 34. $\rho_+ + \rho_-$ ist eine exakte 1-Form auf Z .

Beweis. Die beiden möglichen Funktionen zur Beschreibung der Position des Drehpunktes in Abhängigkeit von der Position des Tracers sind gemäß (3.1) gegeben durch

$$(x_{0,+}, y_{0,+}) : Z \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad z \mapsto P e^{i(\phi_+(z) + \text{Arg}(z))}$$

$$(x_{0,-}, y_{0,-}) : Z \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad z \mapsto P e^{i(\phi_-(z) + \text{Arg}(z))}.$$

Hierbei bezeichnen $\phi_{\pm}(z) = \arcsin\left(-\frac{F}{P} \sin \theta_{\pm}(z)\right)$, $\theta_{\pm}(z) = \pm A^{-1}(|z|) = \mp \arccos\left(\frac{r^2 + F^2 - P^2}{2Fr}\right)$ die positive/negative Wahl der Stellungsparameter des Planimeters. Für $z \in Z$ gilt insbesondere $-(\theta_+(z), \phi_+(z)) = (\theta_-(z), \phi_-(z))$. Wir betrachten nun $\rho_{\pm}(p)$ für $p = (x, y) \in Z$

$$\begin{aligned} \rho_{\pm}(p) &= \frac{x(p) - x_{0,\pm}(p)}{F} dx + \frac{y(p) - y_{0,\pm}(p)}{F} dy \\ &= \text{Re} \left(P e^{i(\phi_{\pm}(p) + \text{Arg}(p))} + F e^{i(\theta_{\pm}(p) + \text{Arg}(z))} - P e^{i(\phi_{\pm}(p) + \text{Arg}(p))} \right) \frac{1}{F} dx \\ &\quad + \text{Im} \left(P e^{i(\phi_{\pm}(p) + \text{Arg}(p))} + F e^{i(\theta_{\pm}(p) + \text{Arg}(z))} - P e^{i(\phi_{\pm}(p) + \text{Arg}(p))} \right) \frac{1}{F} dy \\ &= \cos(\theta_{\pm}(p) + \text{Arg}(p)) dx + \sin(\theta_{\pm}(p) + \text{Arg}(p)) dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned}
(\rho_+ + \rho_-)(p) &= (\cos(\theta_+(p) + \text{Arg}(p)) + \cos(-\theta_+(p) + \text{Arg}(p))) dx \\
&\quad + (\sin(\theta_+(p) + \text{Arg}(p)) + \sin(-\theta_+(p) + \text{Arg}(p))) dy \\
&= 2 \cos(\theta_+(p)) (\cos(\text{Arg}(p)) dx + \sin(\text{Arg}(p)) dy) = 2 \cos(\theta_+(p)) \left(\frac{x}{\|p\|} dx + \frac{y}{\|p\|} dy \right) \\
&= 2 \cos \left(-\arccos \left(\frac{\|p\|^2 + F^2 - P^2}{2F\|p\|} \right) \right) \left(\frac{x}{\|p\|} dx + \frac{y}{\|p\|} dy \right) \\
&= 2 \frac{\|p\|^2 + F^2 - P^2}{2F\|p\|^2} (x dx + y dy) = \frac{1}{F} \left(1 + \frac{F^2 - P^2}{\|p\|^2} \right) (x dx + y dy).
\end{aligned}$$

Die Funktion $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ $p = (x, y) \mapsto \frac{1}{F} \left[\frac{\|p\|^2}{2} + (F^2 - P^2) \log(\|p\|) \right]$ ist glatt auf Z und es gilt

$$\begin{aligned}
df(p) &= \frac{1}{F} \left[\|p\| \frac{x}{\|p\|} + \frac{F^2 - P^2}{\|p\|} \frac{x}{\|p\|} \right] dx + \frac{1}{F} \left[\|p\| \frac{y}{\|p\|} + \frac{F^2 - P^2}{\|p\|} \frac{y}{\|p\|} \right] dy \\
&= \frac{1}{F} \left[1 + \frac{F^2 - P^2}{\|p\|^2} \right] (x dx + y dy) = (\rho_+ + \rho_-)(p).
\end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 32. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \langle \rho_+(\tau(t)), \dot{\gamma}_+(t) \rangle + \int_0^T dt \langle \rho_-(\tau(t)), \dot{\gamma}_-(t) \rangle \\
&= \int_0^T dt \langle \rho_+(\tau(t)), \dot{\tau}(t) \rangle - \frac{F-f}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_+(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,+}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,+}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_+(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_{0,+}(\tau(t))) \\ x(t) - x_{0,+}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \int_0^T dt \langle \rho_-(\tau(t)), \dot{\tau}(t) \rangle - \frac{F-f}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_-(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,-}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,-}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_-(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_{0,-}(\tau(t))) \\ x(t) - x_{0,-}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_0^T \langle (\rho_+ + \rho_-)(\tau(t)), \dot{\tau}(t) \rangle}_{\int_{\tau}(\rho_+ + \rho_-) \stackrel{\text{Lemma 34}}{=} 0} - \frac{F-f}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_+(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,+}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,+}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_+(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_{0,+}(\tau(t))) \\ x(t) - x_{0,+}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad - \frac{F-f}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_-(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,-}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,-}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{F} \int_0^T dt \left\langle \rho_-(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_{0,-}(\tau(t))) \\ x(t) - x_{0,-}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, die übrigen betrachten wir in Zweiergruppen. Für den zweiten und vierten Term erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \left\langle \rho_{\pm}(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_0^T dt \left\langle \frac{x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t))}{F} dx + \frac{y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t))}{F} dy, \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2F} \int_0^T dt \underbrace{\frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t)) \\ y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle}_{=F^2}} = \frac{1}{2F} \int_0^T dt 0 = 0.
\end{aligned}$$

Der dritte und fünfte Term ergeben

$$\begin{aligned}
&\int_0^T dt \left\langle \rho_{\pm}(\tau(t)), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -(y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t))) \\ x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{F} \int_0^T dt - (x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t))) \frac{d}{dt} (y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t))) + (y(t) - y_{0,\pm}(\tau(t))) \frac{d}{dt} (x(t) - x_{0,\pm}(\tau(t))) \\
&= F \int_0^T dt - \cos(\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t)) \cos(\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t)) \frac{d}{dt} (\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t)) \\
&\quad + \sin(\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t)) (-\sin(\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t))) \frac{d}{dt} (\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t)) \\
&= -F \int_0^T dt \frac{d}{dt} (\theta_{\pm}(r(t)) + \alpha(t)) = -F(\theta_{\pm}(r(T)) - \theta_{\pm}(r(0)) + \alpha(T) - \alpha(0)) = -F(\alpha(T) - \alpha(0)).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\int_0^T dt \langle \rho_+(\tau(t)), \dot{\gamma}_+(t) \rangle + \int_0^T dt \langle \rho_-(\tau(t)), \dot{\gamma}_-(t) \rangle = -\frac{2\mu}{F} F(\alpha(T) - \alpha(0)) = -2\mu(\alpha(T) - \alpha(0)).$$

Nun berechnen wir $\overline{\mathcal{PM}}(\tau)$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{PM}}(\tau) &= \frac{1}{2} \left[F \cos \beta \int_{\tau} \chi'_+ - F \sin \beta \int_0^T dt \langle \rho_+(\tau(t)), \dot{\gamma}_+(t) \rangle \right. \\ &\quad \left. + F \cos \beta \int_{\tau} \chi'_- - F \sin \beta \int_0^T dt \langle \rho_-(\tau(t)), \dot{\gamma}_-(t) \rangle \right] \\ &= \frac{F}{2} \cos \beta \int_{\tau} \chi'_+ + \chi'_- - \frac{\mu}{2} \left[\int_0^T dt \langle \rho_+(\tau(t)), \dot{\gamma}_+(t) \rangle + \int_0^T dt \langle \rho_-(\tau(t)), \dot{\gamma}_-(t) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Die Integrale von χ'_+ und χ'_- entlang τ sind nach Satz 22 beziehungsweise Satz 27 unabhängig von der Planimeterstellung und mit dem zuvor gezeigten Ergebnis für den hinteren Term erhalten wir, falls der Ursprung im Äußeren von τ (d.h. insbesondere $\text{Ind}_{\tau}(0) = 0$) ist

$$\overline{\mathcal{PM}}(\tau) = \frac{F}{2} \cos \beta \frac{2}{F} \int_{\Omega} dx \wedge dy - \frac{F}{2} \sin \beta (-2)\mu(\alpha(T) - \alpha(0))$$

$$\stackrel{\text{Ind}_{\tau}(0)=0}{=} \cos \beta \int_{\Omega} dx \wedge dy + \sin \beta F \mu 0 = \cos \beta \int_{\Omega} dx \wedge dy$$

und falls der Ursprung im Inneren von τ liegt, also $\text{Ind}_{\tau}(0) = 1$ gemäß Beispiel 3.4.3 in [Fre18]

$$\overline{\mathcal{PM}}(\tau) = \frac{F}{2} \cos \beta \frac{2}{F} \left[\int_{\Omega} dx \wedge dy - \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy \right] - \frac{F}{2} \sin \beta (-2)\mu(\alpha(T) - \alpha(0))$$

$$\stackrel{\text{Ind}_{\tau}(0)=1}{=} \cos \beta \left[\int_{\Omega} dx \wedge dy - \int_{B_{R_N}(0)} dx \wedge dy \right] + \sin \beta F \mu 2\pi.$$

□

Kapitel 4

Entwurf, Fertigung und Anwendung eines polaren Planimeters

Die im vorangegangenen Kapitel erarbeitete Theorie polarer Planimeter soll nun praktisch umgesetzt werden. Hierzu wurde zunächst ein CAD-Modell eines kompensierenden polaren Planimeters entworfen und gefertigt (siehe Abbildung 4.1). Dieses Kapitel fasst die wesentlichen Punkte vom Entwurf bis zur Kalibrierung und Anwendung des Planimeters zusammen.

4.1 Konstruktion und Fertigung

Beim Entwerfen eines eigenen Planimeters orientieren wir uns am Aufbau und der Dimensionierung handelsüblicher, mechanischer, polarer Planimeter, siehe beispielsweise [Gmb]¹. Sie sind so dimensioniert, dass Flächen mit den ungefähren Maßen eines DIN-A4-Blatts (21,0 cm × 29,7 cm) noch in den zugänglichen Bereich des Planimeters passen. Dies erlaubt einige alltägliche Anwendungen wie die Vermessung von Flächen auf (flächentreuen) Landkarten und wird ab Polarmängen von etwa 20 cm erreicht, wobei der Fahrarm wenige Zentimeter kürzer ist als der Polarm. Unsere Konstruktion folgt in ihren Grundzügen dem Aufbau des in Abbildung 1.1 gezeigten kompensierenden polaren Planimeters.

Bezüglich der Messgenauigkeit ist das Ziel, für Flächen ab ca. 100 cm² einen Fehler im niedrigen einstelligen Prozentbereich zu erhalten. Dies liegt deutlich über den Herstellerangaben für den Fehler kommerzieller Planimeter von wenigen Promille [Gmb]. Für eine höhere Präzision sind jedoch neben sehr exakter Fertigung eine Vorrichtung zur präziseren Einstellung der Fahrarmlänge nötig, was eine aufwändigere Konstruktion und deutlich mehr handwerkliches Geschick bei der Fertigung erfordern würde. Da der Fehler bei unerfahrenen AnwenderInnen ohnehin hauptsächlich von dem/der AnwenderIn selbst verursacht wird, geben wir uns mit einem größeren Messfehler zufrieden.

Unser Entwurf besteht im Wesentlichen aus vier Komponenten: einem Pol, einem Polarm, einem Fahrarm und einer Schiene, die Pol- und Fahrarm verbindet und als Halterung für alle weiteren Teile (zum Beispiel das Zählrädchen) dient. Alle Teile werden je nach Verfügbarkeit der Materialien aus

¹Eine Vielzahl von Aufnahmen historischer Planimeter aus dem 19. und 20. Jahrhunderts sind auf der Webseite von J. Eggers zu finden <https://mathweb.ucsd.edu/~jeggers/Planimeter/index.html>.

Aluminium, Messing oder Edelstahl gefertigt. Die Bestandteile werden hier nur kurz beschrieben, für detaillierte technische Zeichnungen siehe Anhang 7.

Der Pol besteht lediglich aus einem Zylinder, in dessen Mitte eine kreisrunde Vertiefung mit flachem Boden eingelassen ist. Sie dient als Halterung für eines der beiden Enden des Polarms. Der Polarm selbst besteht aus einer 23 cm Stange von quadratischem Querschnitt. Auf einer ihrer Seiten sind an beiden Enden kreisrunde Stifte angebracht die sich möglichst passgenau in hierfür vorgesehene Vertiefungen am Pol und an der Schiene einsetzen lassen. Die Verbindungsstellen erlauben also beliebige Drehungen (um die Achse der Stifte) und bilden somit die beiden Gelenke des Planimeters. Das Herzstück des Planimeters bildet die Schiene, an welchem sowohl das Zählrädchen als auch der

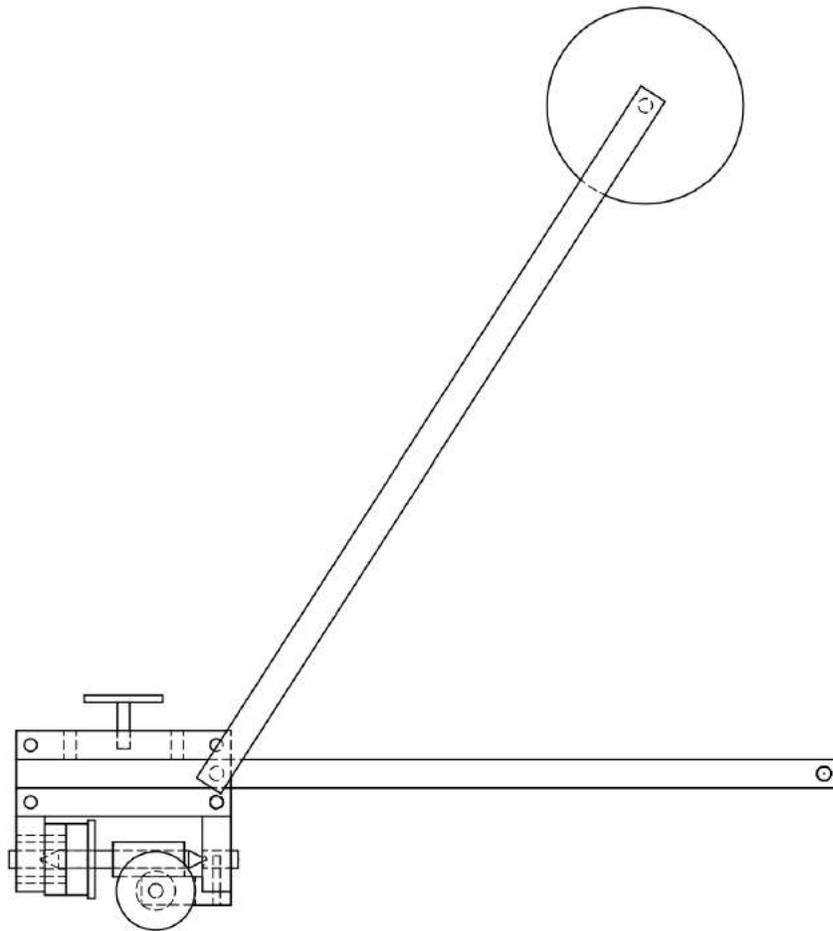


Abbildung 4.1: Technische Zeichnung zum selbstgebauten, kompensierenden, polaren Planimeter.

Fahrarm angebracht sind. Abbildung 4.2 zeigt die Schiene in der Draufsicht und Seitenansicht. In der Seitenansicht ist im oberen Teil der Schiene eine 9 mm tiefe Nut erkennbar, welche nach oben von einer Abdeckung geschlossen wird. In diese Nut kann der Fahrarm, eine weitere 23 cm lange Stange mit quadratischem Querschnitt, passgenau eingesetzt werden. Die Abdeckung lässt sich an allen vier Ecken an der Schiene festschrauben, sodass der Fahrarm bei angezogenen Schrauben zwi-

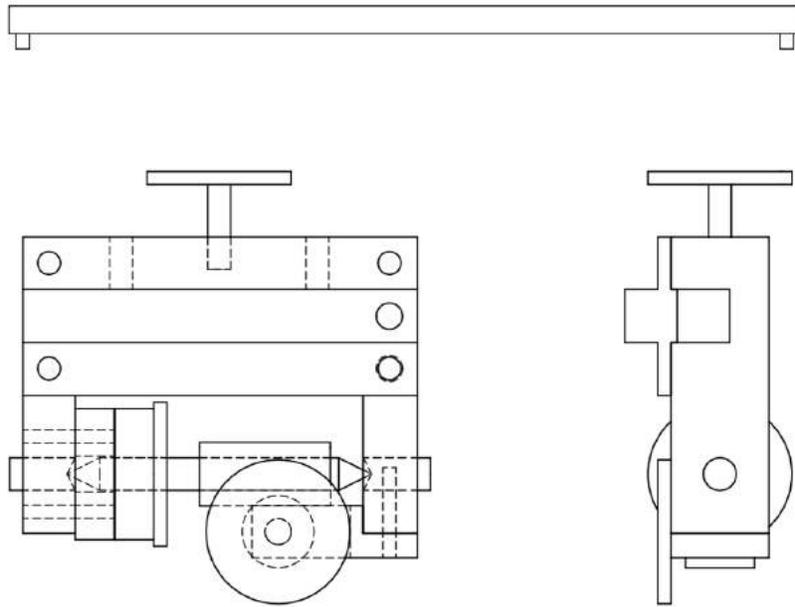


Abbildung 4.2: Technische Zeichnung der Schiene und des Polararms. Zu sehen sind die Einlassung zur Anbringung des Polararms, die Nut zum Einführen des Fahrarms und das eingespannte Zählradchen mit Rundenzähler.

schen der Abdeckung und der Schiene eingeklemmt ist. Eine Bewegung des Fahrarms relativ zur Schiene ist dann nicht mehr möglich. Diese Vorrichtung ermöglicht es, verschiedene Fahrarmlängen einzustellen beziehungsweise eine Kalibration des Planimeters vorzunehmen. In die Abdeckung ist auch die Vertiefung zum Einstecken des Polararms eingelassen.

Der sensibelste Teil der gesamten Konstruktion ist die Anbringung des Zählradchens, dessen Achse in den offenen unteren Teil der hufeisenförmigen Schiene eingespannt ist. Es ist für die Funktion des Planimeters unerlässlich, dass das Zählradchen möglichst leichtgängig ist und die Achse kein Spiel in ihrer Anbringung besitzt, da größere Reibungsverluste oder eine wackelnde Achse das Drehverhalten des Zählradchens stark beeinflussen würden. Die Achse ist daher an beiden Enden zu einem spitzen Kegel angespitzt. An beiden Enden des Hufeisens sind Gewinde eingelassen, in die Gewindestangen geschraubt werden, an deren Enden ein stumpfer Kegel ausgebohrt wurde. Die Achse kann somit zwischen den Gewindestangen eingespannt werden, sodass sich im Idealfall Achse und Anbringung nur an zwei Punkten - nämlich den Spitzen der Kegel berühren. Auf diese Weise wird eine besonders leichtgängige Achse realisiert. An der Achse ist das Zählradchen montiert, dessen Skala an einem danebengelegenen Strich abgelesen werden kann. Auf einen Nonius zur genaueren Ablesung wurde verzichtet, da bei der vorgesehenen Fahrarmlänge die Ablesegenauigkeit einer einfachen Skala bereits im Zielbereich für die Messgenauigkeit liegt. An der Achse ist außerdem über ein Schneckengetriebe ein drehbares Scheibchen angebracht, an welchem die Anzahl ganzer Umdrehungen des Zählradchens abgelesen werden können. Dies ist kein essentielles Bauteil, macht den Messvorgang jedoch deutlich bequemer. An der Oberseite der Schiene ist ein weiteres Rad als Stütze angebracht, das sicherstellt,

dass das Planimeter wackelfest auf dem Untergrund aufsitzt. Die Skala des Zählrädchens zählt 31 Skalenteilungen à 4 cm^2 im Abstand von 2 mm.

In Abbildung 4.3 ist das fertige Planimeter abgebildet. Die Position des Stützrades ist im Vergleich zum CAD-Modell etwas weiter vom Tracer entfernt, um bei weit eingefahrenem Fahrarm mehr Stabilität zu gewährleisten. Die Achse des Zählrädchens ist wenige Millimeter kürzer und die beiden offenen Enden der Schiene etwas schmaler als ursprünglich vorgesehen, da dies das Einspannen erleichtert. Der Polarm ist einige Millimeter kürzer als ursprünglich vorgesehen. Der Tracer ist abweichend vom ursprünglichen Plan nicht angespitzt, da der verwendete Passtifts beim Meißel der Drehmaschine zu starkem Verschleiß führen würde. Außerdem sind die Durchmesser der Vertiefungen zum Aufsetzen des Polarms bei der Fertigung etwas zu groß ausgefallen. Die beiden letztgenannten Abweichungen könnten potentiell den Messfehler deutlich vergrößern. Es soll sich jedoch im Abschnitt zur Kalibrierung und Fehlerbestimmung zeigen, dass sich der Fehler in der Praxis trotz dieser Umstände im Zielbereich bewegt.

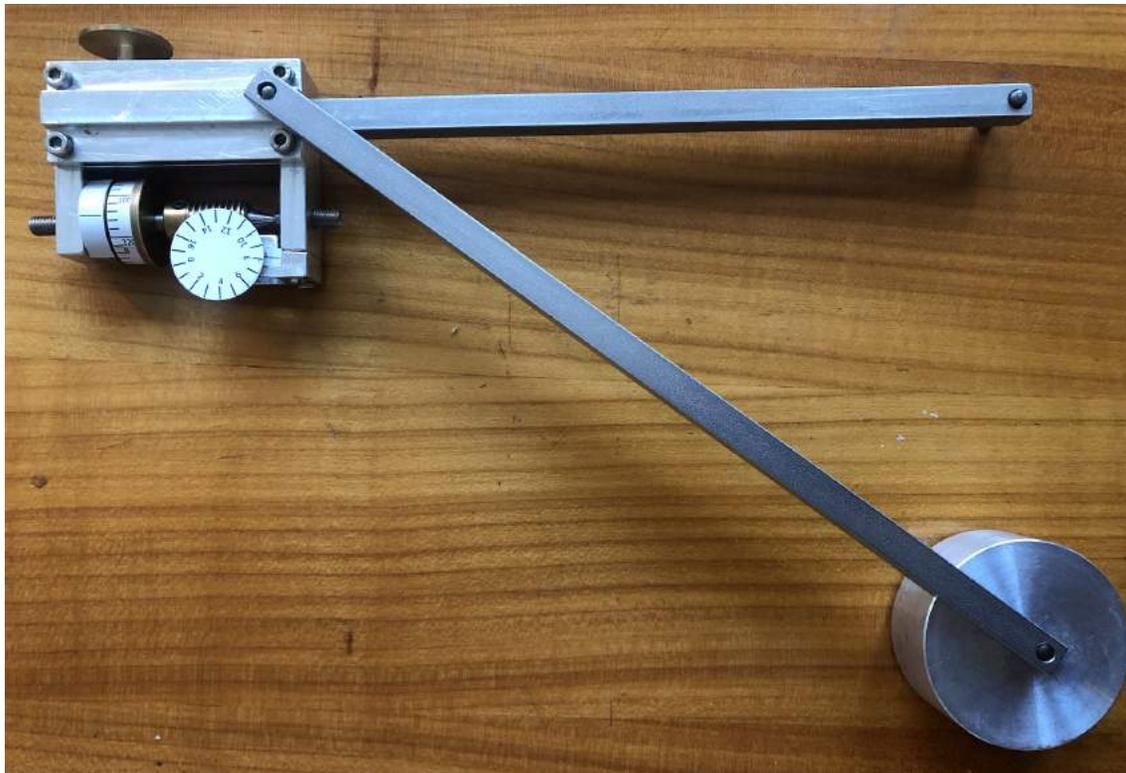


Abbildung 4.3: Nach dem Entwurf in Abbildung 4.1 gefertigtes polares Planimeter.

4.2 Gebrauchsanweisung

Zur Kalibrierung und Fehlerbestimmung im nächsten Abschnitt wurden zahlreiche Messungen mit dem Planimeter durchgeführt. Im Folgenden wird eine kurze Erklärung zum Ablauf der Messungen gegeben.

Vor jeder Messung muss sichergestellt werden, dass der Pol und die zu vermessende Fläche sich im Lauf der Messung nicht relativ zueinander bewegen - etwa indem man das Blatt, auf dem die Randkurve der Fläche gezeichnet wurde, mit Klebestreifen am Untergrund fixiert. Außerdem sollte überprüft werden, ob die Achse des Zählrädchens wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben zwischen den Gewindestangen eingespannt ist und ggf. nachgezogen werden. Danach läuft die Messung in den folgenden Schritten ab.

Einzelmessung: Pol außerhalb der Fläche

1. Den Pol so platzieren, dass sich die zu vermessende Fläche innerhalb des zugänglichen Bereichs des Planimeters befindet.
2. Den Tracer auf einen Punkt auf der Randkurve der Fläche setzen. Es bietet sich an, den Startpunkt so zu wählen, dass die Achse des Zählrädchens zu Beginn der Messung tangential zur Kurve am Ort des Tracers steht. So kann der Einfluss von nicht exakt übereinstimmenden Start- und Endpunkten der abgefahrenen Kurve minimiert werden.
3. Die Randkurve vorsichtig einmal gegen den Uhrzeigersinn abfahren.
4. Den Messwert am Rundenzähler und Zählrädchen ablesen. Ist die Fahrarmlänge F passend zur Zählrädchenskala eingestellt (hier $F = 17.70$ cm, siehe nächster Abschnitt), so beträgt der Messwert des Flächeninhalts der umfahrenen Kurve $A = (N \cdot 124 + n) \text{ cm}^2$, wobei N die auf dem Rundenzähler und n die auf dem Zählrädchen angezeigte Zahl bezeichnet. Weicht die Länge des Fahrarms um einen Faktor c von diesem Wert ab, so ist der Messwert mit dem gleichen Faktor c zu skalieren $A = c(N \cdot 124 + n) \text{ cm}^2$.

Einzelmessung: Pol innerhalb der Fläche

1. Den Pol innerhalb der zu vermessenden Fläche platzieren.
2. Bis 4. siehe *Einzelmessung: Pol Außerhalb der Fläche*. Der Messwert gibt in diesem Fall die Differenz zwischen dem Flächeninhalt der zu vermessenden Fläche und dem des neutralen Kreises A_N an $A - A_N = (N \cdot 124 + n) \text{ cm}^2$ beziehungsweise $A - A_N = c(N \cdot 124 + n) \text{ cm}^2$. Vorsicht: A_N ist abhängig von c gemäß Gleichung (3.6).

Kompensierende Messung

1. Führe eine Einzelmessung (Pol innerhalb oder außerhalb der Fläche durch) für eine der beiden möglichen Planimeterstellungen durch.
2. Schritte 2 bis 4 der Einzelmessung in der zweiten Planimeterstellung wiederholen.
3. Der um den Fehler der Achsausrichtung kompensierte Messwert ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der beiden Einzelmessungen aus Schritt 1 und 2.

Im Rest des Kapitels ist, sofern nichts anders angeführt, stets von kompensierenden Messungen mit Pol außerhalb der Fläche die Rede.

4.3 Kalibrierung und Charakterisierung des polaren Planimeters

In der Regel zeigt die Skala eines Planimeters nicht die vom Zählrädchen gerollte Strecke an, sondern direkt den Flächeninhalt der von der abgefahrenen Kurve eingeschlossene Fläche. Wie man leicht anhand von Gleichung (22) sehen kann, sind die Messwerte dann jedoch nur korrekt, falls der Fahrarm auf die richtige Länge eingestellt wurde. Die passende Fahrarmlänge F lässt sich prinzipiell einfach berechnen aus dem Verhältnis des Messwerts für den Flächeninhalt einer umrandeten Fläche und der dabei vom Zählrädchen abgerollten Strecke: stimmen Messwert und Flächeninhalt überein, so gilt

$$F \stackrel{\text{Satz 22}}{=} \frac{A}{l} = \frac{\mathcal{PM}(\tau)}{l}$$

wobei l die abgerollte Strecke des Zählrädchens, A den Flächeninhalt und $\mathcal{PM}(\tau)$ den Messwert des Planimeters bezeichnet. Daraus ergibt sich für unser Planimeter bei einem Umfang des Zählrädchens von $l = 2.20\pi$ cm und einem Messwert von 124 cm² für eine volle Umdrehung als theoretischer Wert von $F = 17.94$ cm für die Fahrarmlänge. In der Praxis kann dieser Wert durch Abweichungen der Zielmaße des Zählrädchens und eine leicht schief stehende Achse vom theoretischen Wert abweichen, weshalb die ideale Fahrarmlänge experimentell durch Testmessungen an Flächen von bekanntem Flächeninhalt bestimmt wird.

Messungen physikalischer Größen sind immer fehlerbehaftet. Daher ist ein Messwert nichts wert, wenn keine Informationen über den Fehler der Messung vorhanden sind. Nach der Kalibrierung wollen wir deshalb den Messfehler unseres selbstgebaute Planimeters bestimmen. Hierbei folgen wir den Ausführungen in [MAL89]. Die Fehler einer Messung mit einem polaren Planimeter sind bestimmt durch

- Ablesefehler der Skala
- Fehler, die durch nicht übereinstimmende Start- und Endpunkte der mit dem Tracer abgefahrenen Kurve entstehen.
- mechanische Imperfektionen, Fehler verursacht durch Reibung, Schlupf, wackelnde und sich biegende Komponenten und nicht perfekte Kalibrierung.
- von dem/der AnwenderIn verursachte Fehler durch ungenaues Abfahren der Randkurve

Der Gesamtfehler kann von der Form

$$\Delta A = a + b\sqrt{A} + cA \tag{4.1}$$

angenommen werden, wobei A den Flächeninhalt der vermessenen Fläche und a, b, c reelle Parameter bezeichnen, welche experimentell bestimmt werden können. Dazu werden mehrere Flächen bekannten Flächeninhalt ausgemessen und an den Abweichungen der Sollwerte von den Referenzwerten ein quadratischer Fit durchgeführt.

Analog wird zur Bestimmung des neutralen Kreises des Planimeters vorgegangen. Betrachten wir noch einmal Gleichung (3.5). Man sieht dass für Messungen mit Pol innerhalb der Fläche gilt

$$\mathcal{PM}(\tau) = A - A_N$$

wobei A_N den Flächeninhalt des neutralen Kreises bezeichnet. Wir führen Flächenmessungen an mehreren konzentrischen Kreisen mit dem Pol als Mittelpunkt durch, um den Flächeninhalt des neutralen Kreises experimentell zu bestimmen. Nach der Kalibrierung können wir diesem einen theoretischen Wert gegenüberstellen (3.6).

Kalibrierung

Wir führen mehrere Testmessungen an einer quadratischen Fläche mit einem Flächeninhalt von $A^* = 98,01 \text{ cm}^2$ durch. Um Fehler durch ungenaues Abfahren des Randes zu vermeiden, wird ein quadratischer Bierdeckel auf einen Tisch geklebt, der als Führung für den Tracer dient (siehe Abbildung 4.4).

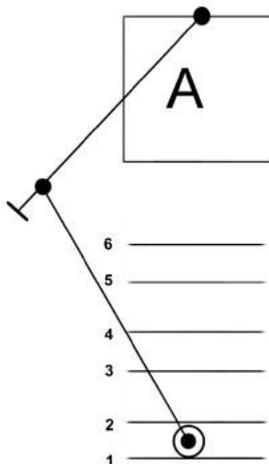


Abbildung 4.4: Versuchsskizze zur Kalibrierung des polaren Planimeters. Die quadratische Fläche hat einen Flächeninhalt von 98 cm^2

Berücksichtigt man zusätzlich die Breite des Tracers, hat das abgefahrene Quadrat eine Seitenlänge von 9.90 cm . Markierungsstriche in verschiedenen Abständen zur Testfläche geben mehrere Positionen des Pols für die Testmessung vor.

Zu Beginn beträgt die Fahrarmlänge $F = (18.50 \pm 0.05) \text{ cm}$. Für die Kalibrierung des Planimeters schätzen wir den Beitrag der einzelnen Fehlerquellen vorläufig grob ab. Für den Ablesefehler nehmen wir wie üblich eine halbe Skalenteilung an, durch kleine Bewegungen des Tracers schätzen wir den Fehler durch nicht übereinstimmende Start- und Endpunkte des Tracers ab. Beide Fehler ergeben sich so zu 2 cm^2 , wobei letzterer streng genommen von der Position des Tracers abhängig ist. Fehler durch ungenaues Abfahren können in diesem Aufbau als unbedeutend angenommen werden, sonstige Fehlerquellen ignorieren wir für den Moment. Wir nehmen alle Fehlerquellen als unabhängig an.

P [cm]	F [cm]	f [cm]
21.80 ± 0.05	17.70 ± 0.05	-3.50 ± 0.05

Tabelle 4.1: Längen von Polarm (P), Fahrarm (F) und Verschiebung des Zählrädchens (f) entlang des Fahrarms ausgehend vom Drehpunkt. Die Größen mussten wegen kleiner Abweichungen des fertigen Planimeters vom Plan gemessen werden, der Fehler entspricht einer halben Skalenteilung

Position Nr.	1	2	3	4	5	6
A [cm ²]	97,5	97,5	98,0	98,3	98,0	98,3

Tabelle 4.2: Messwerte zur Kontrollmessung nach der Kalibrierung. Der Fehler beträgt jeweils 0.3 cm²

Wir führen an den Positionen 2 und 5 jeweils drei Messungen durch, wobei bei jeder Messung der Rand nicht ein- sondern viermal abgefahren wird, um die Genauigkeit der Messung zu erhöhen. Der gemessene Flächeninhalt berechnet sich dann als

$$A = \frac{1}{8}(A_1 + A_2), \quad \Delta A = \frac{1}{8}\sqrt{\Delta A_1^2 + \Delta A_2^2} \approx 0.6 \text{ cm}^2.$$

A_1 und A_2 stehen dabei für die Messwerte der Einzelmessungen in den beiden möglichen Planimeterstellungen. Der Fehler wurde mittels Gaußscher Fehlerrechnung bestimmt (siehe [Wag]). Der Mittelwert aller Messungen ist $A = (93,9 \pm 0,2) \text{ cm}^2$. Die einzustellende Fahrarmlänge F^* beträgt also

$$F^* = \frac{A}{A^*} F \approx (17,72 \pm 0.06) \text{ cm}.$$

Der Fehler von F^* berechnet sich zu

$$\Delta F^* = \sqrt{\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2}.$$

Um zu bestätigen, dass die Kalibrierung erfolgreich war, führen wir jeweils eine Messung in den sechs markierten Positionen durch. Die dazugehörigen Messwerte für den Flächeninhalt sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Keiner der Werte weicht signifikant vom Zielwert ab. Wir betrachten die Kalibrierung daher als erfolgreich. Die Abweichung vom theoretischen Wert für die Fahrarmlänge über die Fehlergrenzen hinaus ist durch Ungenauigkeiten bei der Fertigung wie etwa eine leicht schief stehende Achse oder ein zu großer Umfang des Zählrädchens zu erklären. Die das Planimeter charakterisierenden Größen nach der Kalibrierung sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

Fehlerbestimmung

Um den Messfehler zu bestimmen, messen wir mit dem Planimeter eine größer werdende Anzahl an Zellen einer Kachelung aus Quadraten mit Seitenlänge 6 cm. An die in Abbildung 4.5 gezeigten betragsmäßigen Abweichungen der Messwerte von den exakten Flächeninhalten wurde eine Parabel gefittet. Die optimalen Parameter aus Tabelle 4.3 können dann verwendet werden, um den Messfehler gemäß Formel (4.1) zu bestimmen. Wir nehmen an, dass der gleiche Satz an Parametern auch für Messungen mit Pol innerhalb der Fläche Gültigkeit besitzt.

Details zu den Messungen sind im Anhang 7 aufgeführt. Unterschreitet der mittels des Fits bestimmte Fehler den durch die Ablesegenauigkeit vorgegebenen Fehler von $\sqrt{2} \text{ cm}^2 \approx 1.4 \text{ cm}^2$, so ist der Ablesefehler anzunehmen. Für Flächen, die mindestens 100 cm^2 messen, liegt der relative Fehler also bei unter 1.5%, das Mindestziel für die Messgenauigkeit ist also erreicht.

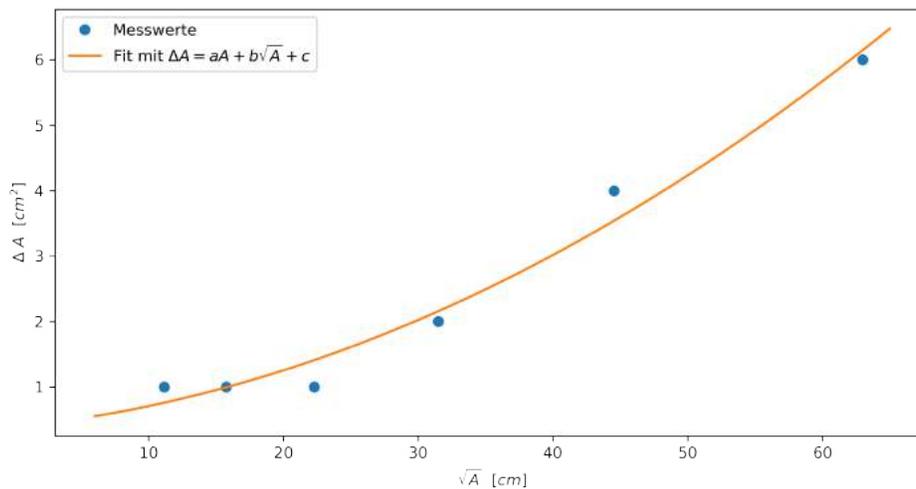


Abbildung 4.5: Betrag der Abweichung zwischen Messungen mit dem Planimeter und den exakten Flächeninhalten. Um die Parameter in Formel (4.1) zu bestimmen, wurde eine Parabel an die Datenpunkte gefittet.

a [cm ²]	b [cm]	c [.]
0.4	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 4.3: Parameter der Fitkurve aus Abbildung 4.5

Bestimmung des neutralen Kreises

Um auch Messungen mit Pol außerhalb der Fläche - und somit die Vermessung deutlich größerer Flächen - zu ermöglichen, soll in diesem Abschnitt die Fläche des neutralen Kreises bestimmt werden. Gemäß Proposition 29 beträgt der Flächeninhalt A_N des neutralen Kreises

$$A_N = \pi [(F - f)^2 + P^2 - f^2],$$

wobei f die Verschiebung des Zählrädchens entlang des Fahrarms relativ zum Drehpunkt bezeichnet. Der Fehler errechnet sich mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta A_N = 2\pi \sqrt{((F - f)\Delta F)^2 + (P\Delta P)^2 + ((F - 2f)\Delta f)^2}.$$

Für unser Planimeter ist der theoretische Wert für die Fläche des neutralen Kreises

$$A_N = (2866 \pm 12) \text{ cm}^2.$$

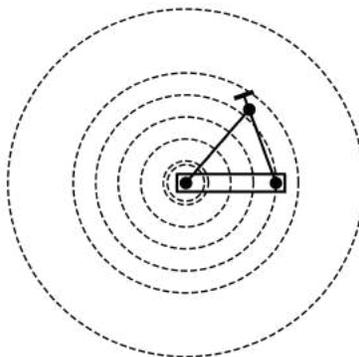


Abbildung 4.6: Skizze des Aufbaus zur Messung des neutralen Kreises. Ein mit Löchern versehenes Lineal hält den Abstand zwischen Tracer und Pol konstant. Die gestrichelten Linien markieren die abgefahrene Kreislinien.

Experimentell bestimmen wir den Flächeninhalt des neutralen Kreises, indem wir ein mit mehreren Löchern versehenes Lineal auf Tracer und Pol stecken und den Tracer um 2π um den Pol drehen. Der Tracer ist dann mit hoher Genauigkeit eine Kreislinie um den Pol abgefahren (siehe Abbildung 4.6). Dieses Vorgehen wird für mehrere Abstände der beiden Löcher sowie bei vollständig ein- und ausgeklapptem Fahrarm¹ wiederholt. Die Messdaten zu diesem Versuch sind im Anhang 7 zu finden. Der Fit eines konstanten Werts an die Differenzen aus Messwert und wahren Flächeninhalt in Abbildung 4.7 ergibt den experimentellen Wert für die Fläche des neutralen Kreises von

$$A_N = (2875 \pm 3) \text{ cm}^2.$$

¹Man kann leicht überprüfen, dass Gleichung (3.7) auch für Kreise vom Radius $P + F$ und $P - F$ gilt, da im Fall von Kreisen mit Mittelpunkt im Ursprung die Planimeterstellung eindeutig bestimmt ist und beide Seiten der Gleichung stetig vom Radius des Kreises abhängen.

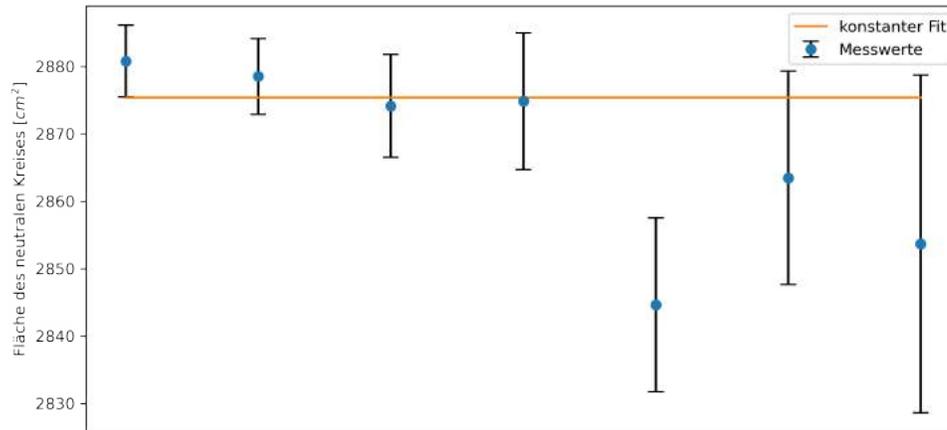


Abbildung 4.7: Die Datenpunkte zeigen die Differenzen von Messwert und wahren Wert für mehrere konzentrische Kreise um den Pol. Bei der Messung befand sich der Pol innerhalb der Fläche. Der konstante Fit ergibt den aus den Messungen bestimmten Wert für die Fläche des neutralen Kreises.

Die Berechnung der Datenpunkte erfolgt mittels

$$A_N = \mathcal{PM} - \pi r^2 \quad \Delta A_N = \sqrt{\Delta \mathcal{PM}^2 + (2r \Delta r)^2}$$

wobei r den Radius des abgefahrenen Kreises bezeichnet. Die Formel für ΔA_N erhält man durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung. Experimenteller und theoretischer Wert stimmen also im Rahmen der Fehlergrenzen überein.

Obwohl das Ziel für die Genauigkeit der Messungen mit dem selbst gebauten Planimeter erreicht wurde, könnten einige Verbesserungen die Messfehler weiter verkleinern.

- Eine Skala auf dem Fahrarm würde die Einstellung der Fahrarmlänge einfacher und reproduzierbarer machen.
- Ein angespitzter Tracer würde die Genauigkeit beim Abfahren von Randkurven und Finden des korrekten Start- und Endpunkts erhöhen und somit den AnwenderInnenfehler verringern.
- Auch wenn zu Beginn bewusst auf einen Nonius verzichtet wurde, zeigt die spätere Bestimmung der Messungenauigkeiten, dass bei relativ kleinen Flächen durchaus eine Verbesserung des Messfehlers mit einem Nonius oder einer feineren Skala möglich gewesen wäre.
- Außerdem lockern sich die Gewindestangen, die die Zählrädchenachse einspannen bei längerem Betrieb. Sie müssen also regelmäßig mit viel Feingefühl nachgezogen werden (da sonst Reibung oder eine wackelnde Achse die Messwerte deutlich verschlechtern). Hier sollte eine Möglichkeit zur dauerhaften Fixierung der Gewindestangen gefunden werden.

Kapitel 5

Theorie des Hachet Planimeters

Wie bereits für polare Planimeter in Kapitel 3 geschehen, untersuchen wir nun in diesem Kapitel die Bewegung und Flächenmessung von Hachet Planimetern.

Das zu einer Kante geschliffene Ende eines Hachetplanimeters wollen wir in diesem Kapitel als *Hinterende*, das zweite, angespitzte als *Vorderende* bezeichnen. Abstrakt können wir das Planimeter als ein Geradenstück der Länge $l > 0$ in der Ebene beschreiben. Der gesamte Konfigurationsraum des Planimeters ist dann gegeben durch $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Die ersten beiden Faktoren sollen dabei für die kartesischen Koordinaten des Hinterendes stehen und der letzte Faktor gibt die Richtung des Geradenstücks an.

Bemerkung 35. Eine weitere mögliche Wahl für den Konfigurationsraum ist $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Wir werden uns in diesem Kapitel mit der Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Kurven im Konfigurationsraum und mit der Berechnung von Integralen von 1-Formen entlang solcher Kurven befassen.

Mithilfe der Überlagerung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2 \times S^1$ mit $p(x, y, \theta) := (x, y, e^{i\theta})$ lässt sich einer Kurve in \mathbb{R}^3 eine eindeutige Kurve gleicher Regularität in $\mathbb{R}^2 \times S^1$ zuordnen.

Die umgekehrte Richtung gilt auch: Nach dem Liftungslemma existiert zu jeder Kurve (x, y, s) in $\mathbb{R}^2 \times S^1$ eine Kurve (x, y, θ) gleicher Regularität in \mathbb{R}^3 , sodass $(x, y, e^{i\theta}) = (x, y, s)$. Unter der für den Rest des Kapitels vorausgesetzten Annahme, dass der Startpunkt von θ in $[-\pi, \pi)$ liegt, ist diese Zuordnung eindeutig.

Außerdem stellen wir fest, dass es keine Rolle spielt, ob wir eine 1-Form $\omega \in \Gamma(T^*(\mathbb{R}^2 \times S^1))$ entlang einer Kurve $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ in $\mathbb{R}^2 \times S^1$ oder stattdessen die mittels p zurückgezogene 1-Form entlang der gelifteten Kurve Γ in \mathbb{R}^3 integrieren, denn

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p^* \omega &= \int_0^T dt \left\langle p^* \omega(\Gamma(t)), \frac{d}{dt} \Gamma(t) \right\rangle = \int_0^T dt \left\langle \omega(p(\Gamma(t))), \frac{d}{dt} (p \circ \Gamma)(t) \right\rangle \\ &= \int_0^T dt \left\langle \omega(\gamma(t)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle = \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

Umgekehrt findet man für jede 2π -periodische 1-Form $\Omega \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$ eine eindeutige 1-Form ω in $\Gamma(T^*(\mathbb{R}^2 \times S^1))$, sodass $p^* \omega = \Omega$. Wir verwenden daher für den Rest dieser Arbeit immer die

Formulierung, die für uns in der jeweiligen Situation am angenehmsten ist. Um deutlich zu machen, welche Darstellung wir gerade nutzen, verwenden wir üblicherweise θ für den Richtungsparameter in \mathbb{R} und $s = (s_1, s_2)^T$ für den Richtungsparameter in S^1 .

Die entlang des Planimeterarms geschliffene Kante erlaubt Bewegungen des Hinterendes nur in Richtung des Planimeterarms und erlegt der Bewegung des Planimeters somit die sogenannte *Fahrrad-Zwangsbedingung*¹ auf.

Definition 36 (Fahrrad-Zwangsbedingung). Sei

$$\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow T^*\mathbb{R}^3; \quad \lambda(x, y, \theta) := \cos \theta \, dy - \sin \theta \, dx$$

und $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Kurve. Dann erfüllt γ die *Fahrrad-Zwangsbedingung* in $t \in [0, T]$, falls

$$\left\langle \lambda(\gamma(t)), \frac{d}{dt}\gamma(t) \right\rangle = 0.$$

γ erfüllt die *Fahrrad-Zwangsbedingung*, wenn γ die *Fahrrad-Zwangsbedingung* für alle $t \in [0, T]$ erfüllt. Für stückweise C^1 -Kurven ist die stückweise Erfüllung der *Fahrradzangsbedingung* analog definiert.

Definition 37 (Trajektorie des Vorder- und Hinterendes). Sei $(x, y, \theta) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stückweise C^1 -Kurve, die die *Fahrrad-Zwangsbedingung* stückweise erfüllt. Dann heißt (x, y) *Trajektorie des Hinterendes* und

$$(a, b) := (x + l \cos \theta, y + l \sin \theta) = (x + l s_1, y + l s_2)$$

Trajektorie des Vorderendes.

5.1 Trajektorie von Hatchet und Tracer

Im Kapitel zur Theorie des polaren Planimeters haben wir gezeigt, dass unter passenden Voraussetzungen die Bewegung des Planimeters durch die Tracertrajektorie bestimmt ist, wenn die anfängliche Stellung des Planimeters vorgegeben ist. Wir wollen in diesem Abschnitt analoge Aussagen für Hatchet-Planimeter zeigen. Genauer gesagt werden wir zeigen, dass eine hinreichend glatte Trajektorie des Vorder- beziehungsweise Hinterendes bei gegebener anfänglicher Planimeterstellung bereits die Trajektorie des Planimeters im Konfigurationsraum vorgibt. In diesem Fall ist dann also auch die Trajektorie des Vorderendes eindeutig durch die des Hinterendes bestimmt und umgekehrt. Dies ist die Aussage der beiden Lemmata 38 und 41.

¹Der Name geht darauf zurück, dass die Bewegung eines idealisierten Fahrrads ebenso diese *Zwangsbedingung* zu erfüllen hat. Das Hinterrad kann sich aufgrund der starren Achse nämlich nur parallel, nicht aber senkrecht zur Richtung des Rahmens bewegen, während sich das Vorderrad im Idealfall uneingeschränkt bewegen kann. In diesem Sinne sind also Hatchet-Planimeter und Fahrräder das gleiche, wobei das Hinterende des Planimeters dem Hinterrad und das Vorderende dem Vorderrad entspricht.

Beide Beweise werden erbracht, indem man aus der Fahrrad-Zwangsbedingung eine (Differential-) Gleichung für den Richtungsparameter herleitet, deren eindeutige Lösung dann zusammen mit der gegebenen Trajektorie des Vorder- beziehungsweise Hinterendes die Trajektorie des Planimeters im Konfigurationsraums vorgibt.

Lemma 38. Sei $(a, b) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stückweise C^k und stückweise reguläre Kurve, $k \geq 1$. Weiters sei $(x_0, y_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^3$, sodass $(x_0 + l \cos \theta_0, y_0 + l \sin \theta_0) = (a, b)(0)$. Dann gibt es genau eine stückweise C^1 -Kurve $(x, y, \theta) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass gilt

- (i) $(a, b)(t) = (x + l \cos \theta, y + l \sin \theta)(t) \quad \forall t \in [0, T]$.
- (ii) $(x, y, \theta)(0) = (x_0, y_0, \theta_0)$.
- (iii) (x, y, θ) erfüllt stückweise die Fahrrad-Zwangsbedingung.

Diese Kurve ist zudem stückweise regulär und stückweise C^k .

Beweis. Eindeutigkeit: Sei $(x, y, \theta) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stückweise C^1 -Kurve, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wir gehen zunächst davon aus, dass (a, b) eine reguläre C^k -Kurve ist und nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt für ein beliebiges $t \in [0, T]$ wegen Bedingung (iii):

$$0 = \left\langle \lambda(x(t), y(t), \theta(t)), \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{\theta}(t) \right)^T \right\rangle$$

$$\stackrel{\text{Def. } \lambda}{\Rightarrow} 0 = \cos \theta(t) l \dot{y}(t) - \sin \theta(t) l \dot{x}(t)$$

$$\stackrel{(i), l > 0}{\Rightarrow} 0 = \left\langle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T, \left(\dot{a}(t) - l \frac{d}{dt} \cos \theta(t), \dot{b}(t) - l \frac{d}{dt} \sin \theta(t) \right)^T \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T, \left(\dot{a}(t), \dot{b}(t) \right)^T \right\rangle$$

$$= l \left\langle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T, (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T \dot{\theta}(t) \right\rangle = l \dot{\theta}(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{1}{l} \left\langle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T, \left(\dot{a}(t), \dot{b}(t) \right)^T \right\rangle$$

Die Abbildung $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, \theta) \mapsto \frac{1}{l} \left\langle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T, \left(\dot{a}(t), \dot{b}(t) \right)^T \right\rangle$ ist stetig und erfüllt eine globale Lipschitzbedingung, da für $(t, \theta_1), (t, \theta_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, denn

$$\begin{aligned}
\|f(t, \theta_1) - f(t, \theta_2)\| &= \frac{1}{l} \left\| \left\langle (-\sin \theta_1 + \sin \theta_2, \cos \theta_1 - \cos \theta_2)^T, (\dot{a}(t), \dot{b}(t))^T \right\rangle \right\| \\
&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz-Ugl.}}{\leq} \frac{1}{l} \left\| (-\sin \theta_1 + \sin \theta_2, \cos \theta_1 - \cos \theta_2)^T \right\| \underbrace{\left\| (\dot{a}(t), \dot{b}(t))^T \right\|}_{\leq 1} \\
&\stackrel{\text{Dreiecks-Ugl.}}{\leq} \frac{1}{l} (|\sin \theta_1 - \sin \theta_2| + |\cos \theta_1 - \cos \theta_2|) \\
&\leq \frac{2}{l} |\theta_1 - \theta_2|.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Lipschitzstetigkeit von \sin und \cos mit Lipschitzkonstante 1. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = f(t, \theta(t)) & \forall t \in [0, T] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

also eine eindeutige Lösung. Da, wie wir oben gezeigt haben, die Voraussetzungen (i) – (iii) bedingen, dass θ eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist, ist θ eindeutig, falls es existiert. Aus Voraussetzung (i) folgt dann direkt auch die Eindeutigkeit von x und y .

Der allgemeine Fall einer stückweise regulären, stückweise C^k -Kurve (a, b) folgt per Induktion über die endliche Anzahl an Abschnitten, auf denen die Kurve regulär und C^k ist. Die Lösung am Ende jedes Abschnitts gibt wegen der geforderten Stetigkeit der globalen Lösung den Anfangswert in (5.1) im jeweils darauffolgenden Abschnitt vor.

Existenz: Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert auch die Existenz einer globalen Lösung θ zum Anfangswertproblem (5.1) für den Fall, dass (a, b) regulär und C^k ist. Mit der gleichen Argumentation wie im Eindeutigkeitsbeweis gilt die Aussage auch für den Fall einer stückweise regulären, stückweise C^k -Kurve (a, b) . Man sieht leicht, dass $(a - l \cos \theta, b - l \sin \theta, \theta)$ stückweise C^1 ist und die Bedingungen (i) – (iii) erfüllt.

Diese Lösung ist darüber hinaus stückweise regulär, da auf regulären Abschnitten von (a, b) aus $\dot{\theta}(t) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}(t) = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} (a(t) - l \cos \theta(t), b(t) - l \sin \theta(t)) = \left(\dot{a}(t) + l \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{b}(t) - l \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \right) \\
&= \left(\dot{a}(t), \dot{b}(t) \right) \neq 0.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite f glatt von θ abhängt und $(k - 1)$ -mal stetig differenzierbar nach der Zeit ist, folgt induktiv, dass $\dot{\theta}$ stückweise $(k - 1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Die Kurve (x, y, θ) ist also eine C^k -Kurve. \square

Bemerkung 39. Somit ist die Trajektorie des Hinterendes durch eine stückweise reguläre und stückweise C^k -Trajektorie des Vorderendes (a, b) eindeutig vorgegeben als

$$(a - l \cos \theta, b - l \sin \theta),$$

wobei θ stückweise das Anfangswertproblem (5.1) löst. Sie ist ebenfalls eine stückweise C^k -Kurve. Anders als die Trajektorie des Planimeters im Konfigurationsraum ist die Trajektorie des Hinterendes im Allgemeinen allerdings nicht stückweise regulär (siehe Beispiel 40).

Beispiel 40. Für die glatte Trajektorie des Vorderendes $(a, b) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto l(\cos t, \sin t)$ und $(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$ ist die Lösung des AWP (4.1) gegeben durch $\theta = id_{[0, 2\pi]}$. Die Trajektorie des Planimeters ist dann

$$(x, y, \theta) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto (l \cos t - l \cos t, l \sin t - l \sin t, t) = (0, 0, t).$$

Das Hinterende steht also im Ursprung still. Seine Trajektorie ist somit nirgends regulär.

Wir machen nun mit der analogen Aussage bei gegebener Trajektorie des Hinterendes weiter. Allerdings verringert sich hierbei die Regularität. Ist die Trajektorie des Hinterendes k -mal stetig differenzierbar, $k \geq 2$, so ist die dazugehörige Trajektorie im Konfigurationsraum nur noch $(k - 1)$ -mal differenzierbar.

Lemma 41. Sei $\gamma := (x, y) : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^2$ eine stückweise reguläre, stückweise C^k -Kurve mit $k \geq 2$. Es gelte für alle $t \in (0, T)$

$$\lim_{\tau \searrow t} \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\|\dot{\gamma}(\tau)\|} = \pm \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\|\dot{\gamma}(\tau)\|}.$$

Außerdem sei $(x_0, y_0, s_0) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ mit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ und $s_0 = \pm \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}$. Dann gibt es eine eindeutige stückweise C^1 -Kurve $(x, y, s) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$, sodass gilt

- (i) $(x, y, s)(0) = (x_0, y_0, s_0)$.
- (ii) (x, y, s) erfüllt stückweise die Fahrrad-Zwangsbedingung.

Diese Kurve ist stückweise regulär und stückweise C^{k-1} .

Beweis. Genau wie im Beweis zu Lemma 38 betrachten wir zunächst den Fall, dass γ eine reguläre C^k -Kurve ist.

Eindeutigkeit: Sei $(x, y, s) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$ eine reguläre C^1 -Kurve, die Bedingung (i) und die Fahrrad-Zwangsbedingung erfüllt. Wegen der Erfüllung der Fahrrad-Zwangsbedingung gilt für $t \in [0, T]$

$$\left\langle s(t), (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^T \right\rangle = 0.$$

Da (x, y) nach Bogenlänge parametrisiert ist und $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T, (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^T$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 bilden, folgt

$$s(t) = \pm \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \in S^1.$$

Mit der Stetigkeit von s folgt daraus, dass s für alle $t \in [0, T]$ durch den Wert $s(0) = s_0 = \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}$ bei $t = 0$ eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir definieren $s := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$, falls $s_0 = \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}$ und $s := -\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$, falls $s_0 = -\frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|}$. Da (x, y) eine C^k -Kurve ist, ist s eine $(k-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Außerdem gilt Bedingung (i) per Konstruktion. Wir müssen uns nun nur noch überzeugen, dass (x, y, s) die Fahrrad-Zwangsbedingung erfüllt. Sei $t \in [0, T]$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \lambda(x(t), y(t), s(t)), (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{s}(t))^T \right\rangle &= \left\langle s(t), (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))^T \right\rangle \\ &= \pm \left\langle (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T, (\dot{y}(t), -\dot{x}(t))^T \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Es ist (x, y, s) stückweise regulär, da (x, y) stückweise regulär ist.

Der allgemeine Fall folgt dann per Induktion über die k -mal stetig differenzierbaren Abschnitte. Die Forderung

$$\lim_{\tau \searrow t} \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\|\dot{\gamma}(\tau)\|} = \pm \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\|\dot{\gamma}(\tau)\|}$$

sichert dabei ab, dass zu Beginn jedes Abschnitts der Richtungsparameter s bis auf ein Vorzeichen mit der Bewegungsrichtung $\frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$ übereinstimmt. \square

Bemerkung 42. Somit ist für $k \geq 2$ die Trajektorie des Vorderendes durch eine C^k -Trajektorie des Hinterendes (x, y) , die die Bedingungen von Lemma 41 erfüllt, vorgegeben durch

$$(x + ls_1, y + ls_2),$$

wobei $s = (s_0, s_1)^T$ stückweise durch $(\dot{x}, \dot{y})^T$ gegeben ist. Die Trajektorie des Vorderendes ist also eine stückweise C^{k-1} -Kurve. Hierbei überträgt sich die stückweise Regularität, da stückweise gilt

$$\begin{aligned} &\left\langle (x \pm ls_1, y \pm ls_2)^T, (x \pm ls_1, y \pm ls_2)^T \right\rangle = \left\langle (x \pm l\dot{x}, y \pm l\dot{y})^T, (x \pm l\dot{x}, y \pm l\dot{y})^T \right\rangle \\ \Rightarrow &\left\langle (\dot{x} \pm ls_1, \dot{y} \pm ls_2)^T, (\dot{x} \pm ls_1, \dot{y} \pm ls_2)^T \right\rangle = \left\langle (\dot{x} \pm l\ddot{x}, \dot{y} \pm l\ddot{y})^T, (\dot{x} \pm l\ddot{x}, \dot{y} \pm l\ddot{y})^T \right\rangle \\ &= \left\langle (\dot{x}, \dot{y})^T, (\dot{x}, \dot{y})^T \right\rangle \pm 2l \left\langle (\dot{x}, \dot{y})^T, (\ddot{x}, \ddot{y})^T \right\rangle + \left\langle (\ddot{x}, \ddot{y})^T, (\ddot{x}, \ddot{y})^T \right\rangle > 0. \end{aligned}$$

Denn $(\dot{x}, \dot{y})^T$ und $(\ddot{x}, \ddot{y})^T$ sind in Parametrisierung nach Bogenlänge orthogonal und $\left\langle (\dot{x}, \dot{y})^T, (\dot{x}, \dot{y})^T \right\rangle > 0$ auf regulären Abschnitten.

Bemerkung 43. Im Gegensatz zu Lemma 38 ist in Lemma 41 die Forderung, dass (x, y) stückweise regulär ist, unerlässlich. Man stelle sich beispielsweise den Fall vor, dass (x, y) auf einem Teilintervall von $[0, T]$ konstant ist. Dann sind auf diesem Teilintervall alle Trajektorien im Konfigurationsraum möglich, sodass das Planimeter am Ende des Teilintervalls tangential zum Geschwindigkeitsvektor bei Fortsetzung der Bewegung steht. An eine gegebene Trajektorie kann also stets eine ganzzahlige Anzahl an halben Drehungen des Planimeters „angehängt“ werden. Die Trajektorie im Konfigurationsraum wäre also nicht mehr eindeutig. Die zusätzliche Forderungen an s_0 und (x, y) stellen sicher, dass die Bewegungsrichtung des Hinterendes zu Beginn jedes Abschnitts von $[0, T]$, auf dem (x, y) regulär und k -mal stetig differenzierbar ist, mit der Fahrrad-Zwangsbedingung kompatibel ist. Da sich das Vorderende frei bewegen darf, war diese Forderung in Lemma 38 nicht notwendig.

5.2 Flächenmessungen mit dem Hachet-Planimeter

Als nächstes wollen wir zeigen, wie Hachet Planimeter dazu verwendet werden können, Flächeninhalte näherungsweise zu messen. Wir werden sehen, dass nach Abfahren der Randkurve einer geeigneten Fläche der Richtungsparameter des Planimeters typischerweise vom Wert vor dem Abfahren abweicht - im Endeffekt dreht sich das Planimeter also um den Startpunkt des Vorderendes um den Winkel $\Delta\theta$. Satz 44 zeigt, dass $\Delta\theta l^2$ bis auf einen Fehlerterm A_H (den wir in Abschnitt 5.3 gesondert betrachten) dem Flächeninhalt der umfahrenen Fläche entspricht.

Satz 44. Sei eine Trajektorie des Vorderendes $\gamma : (a, b) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und θ_0 gegeben und $\eta := (x, y, \theta)$ sei die im Sinne von Lemma 38 zu γ gehörige Trajektorie im Konfigurationsraum. Dann gilt für ein hinreichend großes $l > 0$:

$$A_V = l^2 \Delta\theta + A_H \quad (5.2)$$

mit $\Delta\theta := \theta(T) - \theta(0)$ und $A_V := \frac{1}{2} \int_{\eta} a db - b da$, $A_H := \frac{1}{2} \int_{\tilde{\eta}} x dy - y dx$, wobei $\tilde{\eta}$ wie in Bemerkung 48 definiert ist.

Ist γ eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve und positiv orientiert, so gilt $A_V = \int_{\Omega} dx \wedge dy$.

Die Position des Vorderendes

$$(a, b) = (x + l \cos \theta, y + l \sin \theta)$$

ist eine glatte Funktion definiert auf dem Konfigurationsraum \mathbb{R}^3 . Zunächst beschreiben wir die vom Tracer überstrichene Fläche mithilfe der Fahrrad-Zwangsbedingung und der vom Hinterende überstrichenen Fläche. Wir machen uns klar, dass die überstrichene Fläche für das Vorderende durch die Differentialform $\frac{1}{2}(a db - b da)$ und für das Hinterende durch $\frac{1}{2}(x dy - y dx)$ ausgedrückt wird.

Lemma 45. Es gilt

$$a db - b da = (x dy - y dx) + 2l \lambda - l d(y \cos \theta - x \sin \theta) + l^2 d\theta$$

Beweis. Da $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, sind da und db wohldefiniert und es gilt

$$da = d(x + l \cos \theta) = dx + l d(\cos \theta) = dx - l \sin \theta d\theta,$$

$$db = d(y + l \sin \theta) = dy + l d(\sin \theta) = dy + l \cos \theta d\theta.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a db - b da &= (x + l \cos \theta)(dy + l \cos \theta d\theta) - (y + l \sin \theta)(dx - l \sin \theta d\theta) \\ &= x dy + lx \cos \theta d\theta + l \cos \theta dy + l^2 \cos^2 \theta d\theta - y dx + ly \sin \theta d\theta - l \sin \theta dx + l^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= (x dy - y dx) + \underbrace{l(\cos \theta dy - \sin \theta dx)}_{=\lambda} + l^2 \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} d\theta + l(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \\ &= (x dy - y dx) + l \lambda + l^2 d\theta + l(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir, dass

$$-l d(y \cos \theta - x \sin \theta) = -l \lambda + l(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta.$$

Mit Ketten- und Produktregel erhält man

$$\begin{aligned} -l d(y \cos \theta - x \sin \theta) &= -l(\cos \theta dy + y(-\sin \theta) d\theta - \sin \theta dx - x \cos \theta d\theta) \\ &= -l \underbrace{(\cos \theta dy - \sin \theta dx)}_{=\lambda} + l(y \sin \theta + x \cos \theta) d\theta \\ &= -l \lambda + l(y \sin \theta + x \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Proposition 46. Sei $\eta := (x, y, \theta) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stückweise C^1 -Kurve mit $(x, y)(0) = (x, y)(T)$ und $(a, b)(0) = (a, b)(T)$. Dann gilt

$$A_V - A_H = l \int_{\eta} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\eta} d\theta.$$

Hierbei gelten die Definitionen $A_V := \frac{1}{2} \int_{\eta} a db - b da$ und $A_H = \frac{1}{2} \int_{\eta} x dy - y dx$.

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 45, denn

$$\begin{aligned} A_V - A_H &\stackrel{\text{Lemma 45}}{=} l \int_{\eta} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\eta} d\theta + \frac{l}{2} \int_{\eta} d(y \cos \theta - x \sin \theta) \\ &= l \int_{\eta} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\eta} d\theta + \frac{l}{2} [y(T) \cos \theta(T) - x(T) \sin \theta(T) - y(0) \cos \theta(0) + x(0) \sin \theta(0)]. \end{aligned}$$

Wegen $(x, y)(T) = (x, y)(0)$ und

$$(x(T) + l \cos \theta(T), y(T) + l \sin \theta(T)) = (a, b)(T) = (a, b)(0) = (x(0) + l \cos \theta(0), y(0) + l \sin \theta(0))$$

gilt auch $\cos \theta(T) = \cos \theta(0)$ und $\sin \theta(T) = \sin \theta(0)$. Eingesetzt in die rechte Seite der letzten Gleichung folgt daraus

$$\begin{aligned} A_V - A_H &= l \int_{\eta} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\eta} d\theta + \frac{l}{2} [y(0) \cos \theta(0) - x(0) \sin \theta(0) - y(0) \cos \theta(0) + x(0) \sin \theta(0)] \\ &= l \int_{\eta} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\eta} d\theta + \frac{l}{2} 0 = l \int_{\eta} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\eta} d\theta. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 47. Zu einer gegebenen Trajektorie des Vorderendes $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird die Änderung des Richtungsparameters $\Delta\theta := \theta(T) - \theta(0)$ beliebig klein für ein hinreichend großes $l > 0$, weil stückweise gilt

$$|\dot{\theta}| \leq \frac{1}{l} \left\| \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \dot{\gamma} \right\rangle \right\| \leq \frac{\|\dot{\gamma}\|}{l}, \text{ also } |\Delta\theta| \leq \frac{L(\gamma)}{l}.$$

Bemerkung 48. Proposition 46 kann nur angewendet werden, wenn beide Enden des Planimeters eine geschlossene Kurve abfahren. Im Allgemeinen ist dies bei der Bewegung eines Planimeters nicht der Fall. Wir können uns jedoch mit einem Trick helfen, indem wir das Planimeter nach Abfahren einer Trajektorie im Konfigurationsraum in seine Ursprungslage „zurückdrehen“.

Sei also $\gamma := (a, b) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Trajektorie des Vorderendes, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ und $\eta := (x, y, \theta)$ die dazugehörige Trajektorie im Konfigurationsraum. Wir definieren

$$\eta' := (x', y', \theta') : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a(T) - l \cos(\theta(T) - t\Delta\theta) \\ b(T) - l \sin(\theta(T) - t\Delta\theta) \\ \theta(T) - t\Delta\theta \end{pmatrix}$$

und $\tilde{\eta}$ als die Konkatenation von η und η'

$$\tilde{\eta} := (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta}) : [0, T+1] \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \begin{cases} \eta(t) & \text{falls } t \leq T \\ \eta'(t) & \text{falls } t \geq T. \end{cases}$$

Da η' und η stückweise C^1 sind und $\eta'(0) = \eta'(T)$, ist $\tilde{\eta}$ ebenfalls stückweise C^1 . Die Trajektorie des Vorderendes zu $\tilde{\eta}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\gamma} := (\tilde{a}, \tilde{b})$.

In $[T, T + 1]$ steht das Vorderende per Konstruktion still, während das Hinterende „zurückgedreht“ wird auf seine ursprüngliche Position, insbesondere gilt

$$(\tilde{a}, \tilde{b})(T + 1) = (\tilde{a}, \tilde{b})(T) \stackrel{(a,b) \text{ geschl.}}{=} (a, b)(0)$$

und

$$(\tilde{x}, \tilde{y})(T + 1) = (x', y')(1) = (a(T) - l \cos \theta(0), b(T) - l \sin \theta(0)) \stackrel{(a,b) \text{ geschl.}}{=} (x, y)(0) = (\tilde{x}, \tilde{y})(0).$$

Die Kurve $\tilde{\eta}$ erfüllt also alle Anforderungen von Proposition 46.

Beweis von Satz 44. Zunächst zeigen wir, dass tatsächlich A_V dem Flächeninhalt von Ω entspricht, falls γ eine stückweise glatte, stückweise reguläre Jordankurve und positiv orientiert ist, also dass gilt

$$\int_{\tilde{\eta}} a \, db - b \, da = \int_{\tilde{\eta} + l(\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}, 0)} x \, dy - y \, dx = \int_{\eta + l(\cos \theta, \sin \theta, 0)} x \, dy - y \, dx = 2 \int_{\Omega} dx \wedge dy.$$

Wir betrachten zunächst die erste Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\eta}} a \, db - b \, da &= \int_0^{T+1} dt \left\langle \left(\tilde{x}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t) \right) \left(dy + l \cos \tilde{\theta}(t) \, d\theta \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\tilde{y}(t) + l \sin \tilde{\theta}(t) \right) \left(dx - l \sin \tilde{\theta}(t) \, d\theta \right), \left(\dot{\tilde{x}}(t), \dot{\tilde{y}}(t), \dot{\tilde{\theta}}(t) \right)^T \right\rangle \\ &= \int_0^{T+1} dt \left(\tilde{x}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t) \right) \left(\dot{\tilde{y}}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t) \, \dot{\tilde{\theta}}(t) \right) \\ &\quad - \left(\tilde{y}(t) + l \sin \tilde{\theta}(t) \right) \left(\dot{\tilde{x}}(t) - l \sin \tilde{\theta}(t) \, \dot{\tilde{\theta}}(t) \right) \\ &= \int_0^{T+1} dt \left\langle \left(\tilde{x}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t) \right) \, dy - \left(\tilde{y}(t) + l \sin \tilde{\theta}(t) \right) \, dx, \right. \\ &\quad \left. \left(\dot{\tilde{x}}(t) - l \sin \tilde{\theta}(t) \, \dot{\tilde{\theta}}(t), \dot{\tilde{y}}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t) \, \dot{\tilde{\theta}}(t), \dot{\tilde{\theta}}(t) \right)^T \right\rangle \\ &= \int_{\tilde{\eta} + l(\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}, 0)} x \, dy - y \, dx. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung stellen wir fest

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+1} dt \left\langle \left(\tilde{x}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t) \right) dy - \left(\tilde{y}(t) + l \sin \tilde{\theta}(t) \right) dx, \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\tilde{x}(t) + l \cos \tilde{\theta}(t)}_{=\tilde{a}(t)=\tilde{a}(T)}, \underbrace{\tilde{y}(t) + l \sin \tilde{\theta}(t)}_{=\tilde{b}(t)=\tilde{b}(T)}, \tilde{\theta}(t) \right) \right\rangle \\ &= \int_T^{T+1} dt \left\langle \tilde{a}(t) dy - \tilde{b}(t) dx, \frac{d}{dt} (0, 0, \dot{\tilde{\theta}}(t)) \right\rangle = \int_T^{T+1} dt 0 = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die zweite Gleichung gezeigt, denn

$$\left[\tilde{\eta}(t) + l \left(\cos \tilde{\theta}(t), \sin \tilde{\theta}(t), 0 \right) \right] \Big|_{[0, T]} = \eta(t) + l (\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0).$$

Für die dritte Gleichung bemerken wir, dass

$$\int_{\eta+l(\cos \theta, \sin \theta, 0)} x dy - y dx = \int_{(x,y)+l(\cos \theta, \sin \theta)} x dy - y dx = \int_{\gamma} x dy - y dx = 2 \int_{\Omega} dx \wedge dy,$$

wobei $x dy - y dx$ im ersten Integral als 1-Form auf \mathbb{R}^3 und sonst auf \mathbb{R}^2 aufgefasst wird und die erste Gleichung gilt, weil $x dy - y dx$ nicht von θ abhängt und $(0, 0, 1)$ in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ im Kern von $(x dy - y dx)(p)$ liegt. Die letzte Gleichung folgt aus dem Satz von Green und Proposition 23. Es gilt also $A_V = \int_{\Omega} dx \wedge dy$.

Aus der RHS in Proposition 46 leiten wir nun die RHS von Gleichung (5.2) ab. Nach Proposition 46 gilt

$$A_H - A_V = l \int_{\tilde{\eta}} \lambda + \frac{l^2}{2} \int_{\tilde{\eta}} d\theta.$$

Wir betrachten nun die beiden Terme der rechten Seite dieser Gleichung.

i) $l \int_{\tilde{\eta}} \lambda$:

Da η die Fahrrad-Zwangsbedingung erfüllt und $\tilde{\eta}$ auf $[0, T]$ mit η übereinstimmt, gilt

$$\begin{aligned} l \int_{\tilde{\eta}} \lambda &= l \int_{\eta'} \lambda = l \int_0^1 dt \left\langle \cos(\theta(T) - t\Delta\theta) dy - \sin(\theta(T) - t\Delta\theta) dx, \right. \\ &\quad \left. \frac{d}{dt} (a(T) - l \cos(\theta(T) - t\Delta\theta), b(T) - l \sin(\theta(T) - t\Delta\theta), \theta(T) - t\Delta\theta)^T \right\rangle \\ &= l \int_0^1 dt \left\langle \cos(\theta(T) - t\Delta\theta) dy - \sin(\theta(T) - t\Delta\theta) dx, \right. \\ &\quad \left. (-l\Delta\theta \sin(\theta(T) - t\Delta\theta), l\Delta\theta \cos(\theta(T) - t\Delta\theta), -\Delta\theta)^T \right\rangle \\ &= l \int_0^1 dt l\Delta\theta \cos^2(\theta(T) - t\Delta\theta) + l\Delta\theta \sin^2(\theta(T) - t\Delta\theta) = l^2 \Delta\theta. \end{aligned}$$

ii) $\frac{l^2}{2} \int_{\tilde{\eta}} d\theta$:

Da sowohl die Trajektorie des Hinterendes als auch die des Vorderendes nach Bemerkung 48 geschlossen sind, muss $\Delta\theta$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. Nach Bemerkung 47 gilt aber $|\Delta\theta| \leq \frac{L(\gamma)}{l}$. Wir können also l so groß wählen, dass $|\Delta\theta| \leq 2\pi$. Dann muss schon $\Delta\theta = 0$ gelten. \square

Nehmen wir für den Moment an, dass das Planimeter hinreichend lang und A_H klein ist. Dann liefert Satz 44, dass

$$\int_{\Omega} dx \wedge dy \approx l^2 \Delta\theta.$$

Wir dürfen davon ausgehen, dass der Anwender die Länge l des Planimeters mit hoher Genauigkeit kennt. Der Flächeninhalt von Ω lässt sich dann also allein durch Messung des Winkels, um den sich das Planimeter gedreht hat, bestimmen. In der Praxis gestaltet sich die Messung jedoch noch einfacher. Wir haben in Bemerkung 47 schon gesehen, dass für hinreichend lange Planimeter $\Delta\theta$ beliebig klein wird. Für kleine Winkel lässt sich die Länge $l\Delta\theta$ des Kreisbogens, den das Hinterende beim gedachten „Zurückdrehen“ des Planimeters in die Ursprungsposition überstreicht, approximieren durch den Abstand von Anfangs- und Endposition des Hinterendes, also

$$\int_{\Omega} dx \wedge dy \approx l \|(x, y)(T) - (x, y)(0)\|.$$

Es genügen also zusätzlich zum Hatched Planimeter ein Lineal und ein Stift zum Setzen von Markierungen, um Flächeninhalte zu messen.

5.3 Die Messfehler von Hatched Planimetern

Bei der Beschreibung der Flächenmessung mithilfe von Hatched Planimetern sind wir davon ausgegangen, dass A_H und der Fehler durch Näherung eines Kreisbogens durch die entsprechende Kreissehne klein sind. Während anschaulich sofort klar ist, dass letzterer durch Verwendung immer längerer Planimeter beliebig verkleinert werden kann, wissen wir bisher noch nichts darüber, wie A_H sich verhält und somit, ob unsere Annahme gerechtfertigt war. Wir wünschen uns, dass der Messfehler für immer längere Planimeter beliebig klein wird. Wir zeigen die folgende Aussage.

Proposition 49. Der Gesamtfehler eines Hatched Planimeters liegt in $\mathcal{O}(\frac{1}{l})$.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $\gamma := (a, b) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Trajektorie des Vorderendes, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ der Anfangswert des Richtungsparameters und η die dazugehörige Trajektorie im Konfigurationsraum. Außerdem nehmen wir $l > 0$ als hinreichend groß an, dass Gleichung (5.2) gilt. Wir zeigen die Aussage mit Lemma 50 zunächst für den Fall, dass $l^2\Delta\theta$ exakt gemessen und nicht durch den Abstand von Anfangs- und Endposition des Hinterendes genähert wird.

Lemma 50. Der intrinsische Fehlerterm A_H eines Hatched Planimeters liegt in $\mathcal{O}(\frac{1}{l})$.

Beweis. Seien $\tilde{\eta} := (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta})$, η' und $\gamma := (\tilde{a}, \tilde{b})$ definiert wie in Bemerkung 48. O.B.d.A. sei $\tilde{\eta}(0) = (0, 0, 0)$. Sei $l > 0$ hinreichend groß, sodass $|\theta(T)| = |\Delta\theta| \leq 1$.

Wir zeigen zunächst, dass (\tilde{x}, \tilde{y}) dann für $t \in [0, T]$ in $[-L(\gamma), L(\gamma)] \times \left[-\frac{L(\gamma)^2}{l}, \frac{L(\gamma)^2}{l}\right]$ liegt¹. Per Konstruktion gilt $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{a} + l \cos \tilde{\theta}, \tilde{b} + l \sin \tilde{\theta})$. Durch Ableiten dieser Gleichung und weil $\tilde{\theta}$ in $[0, T]$ stückweise die Differentialgleichung 5.1 erfüllt, gilt stückweise

$$(\dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = \begin{cases} (\cos \theta, \sin \theta) \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \dot{\gamma} \right\rangle & \text{in } [0, T) \\ l \Delta\theta (-\sin \tilde{\theta}, \cos \tilde{\theta}) & \text{in } (T, T + 1] \end{cases}$$

Es gilt also für $t \in [0, T]$

$$|\tilde{x}(t)| = |\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0)| = \left| \int_0^t dt' \dot{\tilde{x}}(t') \right| \leq \int_0^t dt' |\dot{\tilde{x}}(t')| \leq \int_0^t dt' \|(\dot{\tilde{x}}(t'), \dot{\tilde{y}}(t'))^T\| \leq \int_0^t dt' \|\dot{\gamma}(t')\| = L(\gamma)$$

und analog

$$|\tilde{y}(t)| \leq \int_0^t dt' |\dot{\tilde{y}}(t')| = \int_0^t dt' |\sin \theta(t')| \|\dot{\gamma}(t')\| \leq \int_0^t dt' \frac{L(\gamma)}{l} \|\dot{\gamma}(t')\| = \frac{L(\gamma)^2}{l}.$$

Wir stellen auch fest, dass $|\dot{\tilde{y}}| \leq \frac{L(\gamma)}{l} \|\dot{\gamma}\|$ und $|\dot{\tilde{x}}| \leq \|\dot{\gamma}\|$ und betrachten nun den Fehlerterm A_H ,

$$|A_H| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \left| \int_{\eta} x dy - y dx \right|}_{I:=} + \underbrace{\frac{1}{2} \left| \int_{\eta'} x dy - y dx \right|}_{II:=}.$$

Beide Terme werden separat behandelt.

Zu I:

Wir nutzen die soeben gezeigten Abschätzungen für die Trajektorie des Hinterendes, um zu sehen, dass

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left| \int_0^T dt \tilde{x}(t) \dot{\tilde{y}}(t) - \tilde{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t) \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^T dt |\tilde{x}(t)| |\dot{\tilde{y}}(t)| + |\tilde{y}(t)| |\dot{\tilde{x}}(t)| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T dt L(\gamma) \frac{L(\gamma)}{l} \|\dot{\gamma}\| + \frac{L(\gamma)^2}{l} \|\dot{\gamma}\| = \frac{L(\gamma)^3}{l}. \end{aligned}$$

¹Tatsächlich gilt dies auch für alle Zeiten, wie eine kurze Rechnung zeigt. Wir benötigen dies aber nicht für den Beweis.

Zu II:

Anschaulich entspricht II gerade dem Flächeninhalt eines Kreissegments mit Öffnungswinkel $\theta(T)$ zu einem Kreis mit Radius l . Wir führen die Rechnung explizit durch. Für den zweiten Term sehen wir

$$\begin{aligned}
II &= \frac{1}{2} \left| \int_T^{T+1} dt \tilde{x}(t) \dot{\tilde{y}}(t) - \tilde{y}(t) \dot{\tilde{x}}(t) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 dt \tilde{x}(t+T) \dot{\tilde{y}}(t+T) - \tilde{y}(t+T) \dot{\tilde{x}}(t+T) \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 dt [l(1 - \cos((1-t)\theta(T)))] [l\theta(T) \cos((1-t)\theta(T))] \right. \\
&\quad \left. - [-l \sin((1-t)\theta(T))] [-l\theta(T) \sin((1-t)\theta(T))] \right| \\
&= \frac{l^2}{2} \left| \theta(T) \int_0^1 dt \cos((1-t)\theta(T)) - \cos^2((1-t)\theta(T)) - \sin^2((1-t)\theta(T)) \right| \\
&= \frac{l^2}{2} \left| -\theta(T) \int_0^1 dt 1 - \cos((1-t)\theta(T)) \right| = \frac{l^2}{2} |\theta(T) - \sin \theta(T)|.
\end{aligned}$$

Anhand der Reihendarstellung von \sin kann man nun sehen, dass wir II abschätzen können mit

$$II = \frac{l^2 \theta(T)}{2 \cdot 6} \leq \frac{1}{12} \frac{L(\gamma)^3}{l}.$$

Für den Fehlerterm A_H gilt also

$$|A_H| \leq \frac{27}{24} \frac{L(\gamma)^3}{l}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Beweis von Proposition 49. Wir nehmen $l > 0$ als hinreichend groß an, dass $|\Delta\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. Der Abstand von Start- und Endposition des Hinterendes ist

$$\|(x, y)(T) - (x, y)(0)\| = \|(a, b)(T) - l(\cos \theta(T), \sin \theta(T)) - (a, b)(0) + l(\cos \theta(0), \sin \theta(0))\|$$

$$\stackrel{(a,b) \text{ geschl.}}{\cong} l \|(\cos \theta(T), \sin \theta(T)) - (\cos \theta(0), \sin \theta(0))\|.$$

Da Rotationen längentreu sind, können wir also durch Rotation um $-\frac{\Delta\theta}{2} - \theta(0)$ mit $\Delta\theta := \theta(T) - \theta(0)$ schreiben

$$\|(x, y)(T) - (x, y)(0)\| = l \|(\cos(\Delta\theta/2), \sin(\Delta\theta/2)) - (\cos(-\Delta\theta/2), \sin(-\Delta\theta/2))\| = 2l |\sin(\Delta\theta/2)|.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} l \|(x, y)(T) - (x, y)(0)\| - l^2 |\Delta\theta| &= 2l^2 |\sin(\Delta\theta/2)| - l^2 |\Delta\theta| = -l^2 \left| |\Delta\theta| - 2 |\sin(\Delta\theta/2)| \right| \\ &= -l^2 \left| |\Delta\theta| - 2 \sin(|\Delta\theta|/2) \right|. \end{aligned}$$

Ganz analog zur Abschätzung von Term II im Beweis von Lemma 50 erhält man also

$$l \|(x, y)(T) - (x, y)(0)\| - l^2 |\Delta\theta| = l^2 \left| |\Delta\theta| - 2 \sin(|\Delta\theta|/2) \right| \leq l^2 \frac{|\Delta\theta|^3}{24} \leq \frac{1}{24} \frac{L(\gamma)^3}{l} = \mathcal{O}(1/l).$$

Damit folgt für den Gesamtfehler

$$l \|(x, y)(T) - (x, y)(0)\| = l^2 |\Delta\theta| + \mathcal{O}(1/l) \stackrel{\text{Lemma 50}}{=} |A_V| + \mathcal{O}(1/l).$$

□

Bemerkung 51. Man kann darüber hinaus zeigen, dass der intrinsische Fehler in $\mathcal{O}\left(\frac{1}{l^2}\right)$ liegt, wenn man den Tracer zu Beginn der Messung im Schwerpunkt der Fläche platziert (siehe [FLT13]).

5.4 Verbindung zu Möbiustransformationen

Ein beliebiger Anfangswert des Richtungsparameters $e^{i\theta_0} \in S^1$ wird beim Abfahren einer stückweise C^∞ -Kurve $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit dem Tracer in einen neuen Wert überführt. Dieser ist eindeutig bestimmt durch die (stückweise) Erfüllung der Differentialgleichung

$$\dot{\theta} = \frac{1}{l} \left\langle (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))^T, \dot{\gamma}(t) \right\rangle \quad \forall t \in [0, T]$$

mit dem Anfangswert θ_0 . Die Bewegung des Planimeters kann also als eine Abbildung von S^1 nach S^1 aufgefasst werden. Wir gehen für den Rest des Kapitels von $T = 1$ aus.

Definition 52 (Fahrradmonodromie). Sei eine Trajektorie des Vorderendes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stückweise C^∞ -Kurve. Zu einem beliebigen $e^{i\theta_0} \in S^1$ sei (x, y, θ) die zu γ und θ_0 gehörige Trajektorie im Konfigurationsraum. Dann ist eine Abbildung von S^1 auf sich selbst gegeben durch

$$\psi_\gamma : S^1 \rightarrow S^1; \quad e^{i\theta_0} \mapsto e^{i\theta(1)}.$$

Wir bezeichnen sie als *Fahrradmonodromie* von γ . Das Bild der Abbildung

$$\psi : C_{pw}^\infty \rightarrow \text{Abb}(S^1, S^1); \quad \gamma \mapsto \psi_\gamma,$$

also die Menge aller Fahrradmonodromien, bezeichnen wir mit G .

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass die Fahrradmonodromie zu einer stückweise C^∞ -Kurve eine Möbiustransformation aus $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ ist.

Satz 53. Es gilt $G = \text{Möb}^+(\mathbb{D})$.

Die in der Einleitung und in Abschnitt 5.3 besprochene Funktionsweise legt dann nahe, dass bei der alltäglichen Verwendung von Hachet Planimetern die Fahrradmonodromie stets eine elliptische Fahrradmonodromie zu erwarten ist. Es wäre schließlich ein schlechtes Zeichen für die Funktionsfähigkeit des Planimeters, wenn die Fahrradmonodromie zu einer Randkurve einen Fixpunkt besäße. Wir erhielten dann nämlich einen verschwindenden Messwert zu einem nicht verschwindenden Flächeninhalt. Intuitiv verhält sich dies bei Fahrrädern, die ebenso der Fahrrad-Zwangsbedingung unterliegen, anders. Fährt man mit einem Fahrrad ein paar Runden im Kreis, ändert sich der Lenkwinkel nach kurzer Zeit nicht mehr merklich. Man ist also an einem (attraktiven) Fixpunkt der Fahrradmonodromie angelangt! Der entscheidende Unterschied zwischen beiden Fällen ist, dass beim Hachet Planimeter die umfahrene Fläche typischerweise klein im Vergleich zur Länge des Planimeters ist, während sie beim Fahrradfahren groß ist. Die folgende Aussage bestätigt unsere Intuition für den Spezialfall strikt konvexer Kurven.

Proposition 54. Sei $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte, reguläre, strikt konvexe Jordankurve mit $\gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(T)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Fahrradmonodromie ψ_γ

- (i) elliptisch für hinreichend große l .
- (ii) hyperbolisch für hinreichend kleine l .

Bevor wir diese beiden Aussagen beweisen, zeigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 55. (G, \circ) bildet eine Untergruppe von $(\text{Diff}^\infty(S^1), \circ)$.

Beweis. Dieser Beweis folgt dem Beweis aus [Foo98]. Wir nehmen zunächst an, dass $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^∞ -Kurve ist. In diesem Fall ist θ auch glatt und es gilt für $t \in [0, 1]$

$$\frac{d}{dt} e^{i\theta(t)} = ie^{i\theta(t)} \dot{\theta}(t) = ie^{i\theta(t)} \langle ie^{i\theta(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Die rechte Seite ist ein zeitabhängiges Vektorfeld auf S^1 und ψ_γ liegt als der dazugehörige Fluss ausgewertet bei $t = 1$ in $\text{Diff}^\infty(S^1)$ (siehe Satz 32.4 in [CA92]). Wir wollen nun zeigen, dass für zwei C^∞ -Kurven γ, η gilt

$$\psi_\eta \circ \psi_\gamma = \psi_{\eta * \gamma},$$

wobei $\eta * \gamma$ die Konkatenation bezeichnet, das heißt

$$\eta * \gamma(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ \eta * \gamma(t) := \eta(2t) - \eta(0) + \gamma(1) & \text{für } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Daraus folgt dann:

1. Die Abbildung ψ_γ ist auch für stückweise C^∞ -Kurven γ ein C^∞ -Diffeomorphismus, da sich $\psi_\gamma \in G$ dann als Komposition endlich vieler Diffeomorphismen geschrieben werden kann.
2. G ist abgeschlossen bezüglich \circ .

Wir zeigen also für $\theta_0 \in \mathbb{R}$, dass

$$\theta(1, \theta_0, \eta * \gamma) = \theta(1, \theta(1, \theta_0, \gamma), \eta),$$

wobei $\theta(\bullet, \theta_0, \gamma)$ die Richtungskomponente der Trajektorie im Konfigurationsraum zu θ_0 und γ bezeichnet. Für $t \in [0, 1/2]$ gilt

$$\dot{\theta}(t, \theta_0, \eta * \gamma) = \frac{1}{l} \left\langle i e^{i\theta(t, \theta_0, \eta * \gamma)}, 2\dot{\gamma}(2t) \right\rangle$$

Existiert für ein Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = g(t, z(t)) & t \in [t_0, t_1] \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung z . Dann ist für $a \neq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = a g(a(t - \tau) + t_0, z(t)) & t \in [\tau, \tau + \frac{t_1 - t_0}{a}] \\ z(\tau) = z_0 \end{cases}$$

gegeben durch $\tilde{z}(t) = z(a(t - \tau) + t_0)$. Als Lösung $\theta(t, \theta_0, \eta * \gamma)$ bei $t = \frac{1}{2}$ erhält man also $\theta(1/2, \theta_0, \eta * \gamma) = \theta(1, \theta_0, \gamma)$. Im Intervall $[1/2, 1]$ löst $\theta(t, \theta_0, \eta * \gamma)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t, \theta_0, \eta * \gamma) = \frac{1}{l} \left\langle i e^{i\theta(t, \theta_0, \eta * \gamma)}, 2\dot{\eta}(2t) \right\rangle & t \in [1/2, 1] \\ \theta(1/2, \theta_0, \eta * \gamma) = \theta(1, \theta_0, \gamma) \end{cases}$$

und somit folgt $\theta(1, \theta_0, \eta * \gamma) = \theta(1, \theta(1, \theta_0, \gamma), \eta)$. Um den Beweis abzuschließen, stellen wir zum einen fest, dass freilich id_{S^1} in G enthalten ist und $\psi_\gamma^{-1} = \psi_{\gamma^-} \in G$, die Inverse von γ also gerade durch die Fahrradmonodromie der entgegengesetzt durchlaufenen Kurve $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$ entspricht. Man sieht dies wie folgt: Sei γ die zu $\theta_0 \in \mathbb{R}$ und γ gehörige Kurve des Richtungsparameters. Dann löst $\tilde{\theta}(t) := \theta(1-t)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}(t) = -\frac{1}{l} \left\langle i e^{i\tilde{\theta}(1-t)}, \dot{\gamma}(1-t) \right\rangle = \frac{1}{l} \left\langle i e^{i\tilde{\theta}(t)}, \dot{\gamma}^-(t) \right\rangle & t \in [0, 1] \\ \tilde{\theta}(0) = \theta(1). \end{cases}$$

Nach dem Untergruppenkriterium folgt nun die Behauptung. □

Beweis zu Satz 53. Wir folgen dem Beweis aus [Foo98].

$G \subseteq \text{Möb}^+(\mathbb{D})$:

Es genügt, zu zeigen, dass ψ_γ für eine C^∞ -Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ liegt. Das durch γ zum Zeitpunkt $t \in [0, 1]$ erzeugte glatte Vektorfeld auf S^1 lautet

$$\Gamma(\dot{\gamma}(t)) : S^1 \rightarrow TS^1; \quad e^{i\theta} \mapsto \frac{1}{t} i e^{i\theta} \langle i e^{i\theta}, \dot{\gamma}(t) \rangle.$$

Wir bemerken zunächst, dass die Abbildung

$$I : SU(1, 1) \rightarrow \text{Möb}^+(\mathbb{D}); \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1, 1) \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right)$$

ein Homöomorphismus zwischen $SU(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$ und $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ ist. Sein Kern ist $\{\pm 1\}$. Wir können also $PSU(1, 1) := SU(1, 1)/\{\pm 1\}$ identifizieren, und folglich die Lie-

Algebra von $\text{Möb}^+(\mathbb{D})$ mit der von $PSU(1, 1)$, also $\mathfrak{su}(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} i\gamma & \beta \\ \beta & -i\gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ identifizieren. Die Abbildung

$$\iota : PSU(1, 1) \rightarrow \text{Diff}^\infty(S^1); \quad \left[\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right] \in PSU(1, 1) \mapsto I \left(\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right) \Big|_{S^1}^{S^1} = \left(z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \right) \Big|_{S^1}^{S^1}$$

ist ein injektiver Liegruppenhomomorphismus. Sein Differential

$$\phi := d\iota : \mathfrak{su}(1, 1) \rightarrow \mathfrak{X}(S^1); \quad X \mapsto \frac{d}{dt} (I(e^{tX})) \Big|_{t=0}$$

ist also injektiv. Für $X = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \bar{v} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(1, 1)$ erhält man somit das Vektorfeld bei $z = e^{i\theta} \in S^1$

$$\begin{aligned} \phi(X)(z) &= \frac{d}{dt} \left[I \left(\exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & v \\ \bar{v} & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right]_{t=0} (z) \\ &= \frac{d}{dt} \left[I \left(\begin{pmatrix} \cosh(t|v|) & e^{i\text{Arg}(v)} \sinh(t|v|) \\ e^{-i\text{Arg}(v)} \sinh(t|v|) & \cosh(t|v|) \end{pmatrix} \right) \right]_{t=0} (z) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\cosh(t|v|)z + e^{i\text{Arg}(v)} \sinh(t|v|)}{e^{-i\text{Arg}(v)} \sinh(t|v|)z + \cosh(t|v|)} \right]_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^{-i\text{Arg}(v)}|v|\cosh(0)z^2 + \left(|v|\sinh(0) - \overline{|v|\sinh(0)}\right)z + e^{i\text{Arg}(v)}|v|\sinh(0) = -\bar{v}z^2 + v \\
&= e^{i\theta} \left(-\bar{v}e^{i\theta} + ve^{-i\theta}\right) = e^{i\theta} \left(i2\text{Im}\left(ve^{-i\theta}\right)\right) \\
&= ie^{i\theta} \langle ie^{i\theta}, 2v \rangle = \frac{1}{i} ie^{i\theta} \langle ie^{i\theta}, 2lv \rangle.
\end{aligned}$$

Man sieht nun, dass $\Gamma(v)$ für beliebige $v \in \mathbb{R}^2$ im Bild von ϕ liegt mit $\phi\left(\frac{1}{2l}\begin{pmatrix} 0 & v \\ \bar{v} & 0 \end{pmatrix}\right) = \Gamma(v)$.

Um eine passende Möbiustransformation zu finden, suchen wir eine Kurve $A : [0, 1] \mapsto SU(1, 1)$, die zu jedem Zeitpunkt das gleiche Vektorfeld wie γ induziert, betrachten wir das von A bei $t_0 \in [0, 1]$ induzierte Vektorfeld

$$\begin{aligned}
z \in S^1 \mapsto \frac{d}{dt} (I(A(t))(I(A^{-1}(t_0))(z))) \Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt} (I(A(t+t_0))(I(A^{-1}(t_0))(z))) \Big|_{t=0} \\
&= \phi\left(\dot{A}(t_0)A^{-1}(t_0)\right)(z).
\end{aligned}$$

Es erzeugt also A genau dann zu jeder Zeit das gleiche Vektorfeld auf S^1 wie γ , wenn für alle $t \in [0, 1]$ gilt, dass $\Gamma(\dot{\gamma}(t)) = \phi(\dot{A}(t)A^{-1}(t))$. Da ϕ injektiv ist, ist seine Umkehrfunktion auf dem Bild von ϕ definiert und wir haben festgestellt, dass $\Gamma(\dot{\gamma}(t))$ für $t \in [0, 1]$ im Bild von ϕ liegt. Die gesuchte Kurve ist also die eindeutige Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{A}(t)A^{-1}(t) = \phi^{-1}(\Gamma(\dot{\gamma}(t))) \\ A(0) = \mathbb{1}. \end{cases}$$

Die Existenz einer eindeutigen Lösung wird klar bei der Betrachtung der äquivalenten Aufgabe

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \phi^{-1}(\Gamma(\dot{\gamma}(t)))A(t) = \frac{1}{2l} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\gamma}(t) & 0 \end{pmatrix} A(t) \\ A(0) = \mathbb{1}. \end{cases}$$

Unsere gesuchte Familie von Möbiustransformationen ist dann $I \circ A$.

$G \supseteq \text{Möb}^+(\mathbb{D})$:

Es werden insbesondere $X := \phi^{-1}(\Gamma((1, 0)^T)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $Y := \phi^{-1}(\Gamma((0, 1)^T)) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ durch die Bewegung des Planimeters erzeugt. Wegen der Kommutatorrelation

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] = -2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

entspricht die von X und Y erzeugte Unteralgebra von $\mathfrak{su}(1, 1)$ ganz $\mathfrak{su}(1, 1)$. Somit lässt sich mittels der Planimeterbewegung jeder Punkt in $SU(1, 1)$ erreichen. \square

Beweis von Proposition 54. Wir folgen dem Beweis aus [FLT13].

zu (i):

Nach Satz 44 gilt für beliebige Anfangswerte $\theta(0) \in \mathbb{R}$

$$A_V - A_H = l^2 \Delta\theta$$

für hinreichend große l . Wobei A_V , A_H und $\Delta\theta$ wie in Satz 44 definiert sind und A_H dem Flächeninhalt des Inneren Ω von γ entspricht. Wegen $|\Delta\theta| < \frac{L(\gamma)}{l}$ folgt also für hinreichend große l , dass

$$0 < \frac{A_V - A_H}{l^2} = \Delta\theta < 2\pi.$$

Also ist $\psi_\gamma(e^{i\theta(0)}) = e^{i\theta(T)} \neq e^{i\theta(0)}$. Die Möbiustransformation ψ_γ besitzt also keinen Fixpunkt und ist somit elliptisch.

zu (ii):

Wir schreiben $\dot{\gamma}(t) = a(t) e^{i\phi(t)}$ für passende glatte Funktionen $a : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$, $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen der Regularität von γ können wir Parametrisierung nach Bogenlänge annehmen, also $a(t) = 1$ für alle $t \in [0, T]$. Wegen der strikten Konvexität von γ hat γ stets strikt positive beziehungsweise strikt negative Krümmung, das heißt

$$\forall t \in [0, T] : \dot{\phi}(t) > 0 \quad \text{oder} \quad \forall t \in [0, T] : \dot{\phi}(t) < 0.$$

Wir zeigen die Behauptung nur für $\dot{\phi} > 0$, der andere Fall kann völlig analog gezeigt werden.

Sei $0 < l < r := 1/\max \dot{\phi}$ kleiner als der Radius r des kleinsten sich an γ anschmiegenden Kreises. Es gilt dann für $t \in [0, T]$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{l} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{l} \sin(\phi(t) - \theta(t)).$$

Wir zeigen, dass $\theta(T) \in (\phi(T) - \pi/2, \phi(T) + \pi/2)$, falls $\theta(0) \in [\phi(0) - \pi/2, \phi(0) + \pi/2]$ und nehmen zunächst den ersten Fall an, dass $\theta(0) \in (\phi(0) - \pi/2, \phi(0) + \pi/2)$ und zeigen, dass dann $\theta(t)$ stets größer als $\phi(t) - \pi/2$ und kleiner als $\phi(t) + \pi/2$ ist.

Sei $0 < \epsilon < \min\{\theta(0) - (\phi(0) - \pi/2), \arccos(l/r)\} \in (0, \pi/2)$. Nehmen wir an, es gibt ein $t \in [0, T]$, sodass $\theta(t) < \phi(t) - \pi/2 + \epsilon$, dann betrachte $t_0 := \sup\{\tau \in [0, T] | (\theta - \phi)([0, \tau]) \subseteq [-\pi/2 + \epsilon, \infty)\}$.

Da $\underbrace{(\theta - \phi)(t) < -\pi/2 + \epsilon}_{\Rightarrow t_0 < T}$ und $\underbrace{(\theta - \phi)(0) > -\pi/2 + \epsilon}_{\Rightarrow t_0 > 0}$ und wegen der Stetigkeit/stetigen Differenzierbarkeit von $(\theta - \phi)$ ist t_0 in $(0, T)$ und $\frac{d}{dt}(\theta - \phi)(t_0) \leq 0$. Außerdem ist $(\theta - \phi)(t_0) = -\pi/2 + \epsilon$.

Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\theta - \phi)(t_0) &= \frac{1}{l} \sin(\phi(t_0) - \theta(t_0)) - \dot{\phi}(t_0) = \frac{1}{l} \sin(\pi/2 - \epsilon) - \dot{\phi}(t_0) = \frac{1}{l} \cos \epsilon - \dot{\phi}(t_0) \\ &> \frac{1}{l} \cos(\arccos(l/r)) - \dot{\phi}(t_0) = \frac{1}{r} - \dot{\phi}(t_0) = \max \dot{\phi} - \dot{\phi}(t_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $\frac{d}{dt}(\theta - \phi)(t_0) \leq 0$. Also ist $\theta(t) > \phi(t) - \pi/2$ für alle $t \in [0, T]$. Auf die gleiche Weise zeigt man, dass $\theta(t) < \phi(t) + \pi/2$, weil $\dot{\theta}(t) < \dot{\phi}(t)$, wenn $\theta(t)$ nahe an $\phi(t) + \pi/2$ liegt.

Für den zweiten Fall, dass $\theta(0) \in \{\phi(0) - \pi/2, \phi(0) + \pi/2\}$ bemerkt man, dass $\dot{\theta}(0) > \dot{\phi}(0)$, falls $\theta(0) = \phi(0) - \pi/2$ und $\dot{\theta}(0) < \dot{\phi}(0)$, falls $\theta(0) = \phi(0) + \pi/2$. Daraus folgt für eine hinreichend kleine Zeit $\delta > 0$, dass $\theta(\delta) \in (\phi(\delta) - \pi/2, \phi(\delta) + \pi/2)$. Mit dem gleichen Argument wie im ersten Fall folgt dann, dass $\theta(T) \in (\phi(T) - \pi/2, \phi(T) + \pi/2)$.

Die Abbildung $\theta(0) \mapsto \theta(T) - (\phi(T) - \phi(0))$ hat also einen Fixpunkt in $(\phi(0) - \pi/2, \phi(0) + \pi/2)$ nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz.

Aus dem Hopf'schen Umlaufsatz folgt zusätzlich, dass $\phi(T) = \phi(0) + 2\pi$. Die Fahrradmonodromie $\psi_\gamma(e^{\theta(0)}) = e^{i\theta(T)} = e^{i(\theta(T) - (\phi(T) - \phi(0)))}$ hat also einen Fixpunkt. Wir nehmen O.B.d.A. an, dass $\phi(0) = 0$, dann liegt der Fixpunkt in $S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$. Um zu sehen, dass noch ein zweiter Fixpunkt existiert bemerken wir

$$\psi_\gamma(S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq 0\}) \subseteq S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \psi_\gamma(S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) < 0\}) &= \psi_\gamma(S^1 \setminus (S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq 0\})) = \psi_\gamma(S^1) \setminus \psi_\gamma(S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq 0\}) \\ &= S^1 \setminus \psi_\gamma(S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq 0\}) \supseteq S^1 \setminus (S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}) \\ &= S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \leq 0\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) < 0\} \supseteq \psi_\gamma^{-1}(S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \leq 0\}).$$

Weil $S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ homöomorph zu $[-1, 1]$ ist, folgt wieder nach dem Brouwer'schen Fixpunktsatz, dass ψ_γ^{-1} einen Fixpunkt in $S^1 \cap \{\operatorname{Re}(z) < 0\}$ hat. Da ψ_γ und ψ_γ^{-1} die gleichen Fixpunkte haben, hat also ψ_γ mindestens zwei Fixpunkte. Da ψ_γ nicht die Identität ist, muss ψ_γ also hyperbolisch sein. \square

Bemerkung 56. Allgemeiner kann man zeigen, dass ψ_γ unter den Voraussetzungen von Proposition 54 einen attraktiven Fixpunkt besitzt, falls für die von γ umschlossene Fläche A gilt $A \geq \pi l^2$, siehe [FLT13]. *Menzin's Vermutung* besagt, dass dies auch dann noch gilt, wenn man die Forderung, dass γ strikt konvex sein muss, fallen lässt.

Kapitel 6

Entwurf, Fertigung und Anwendung eines Hatchet Planimeters

Wie bereits beim polaren Planimeter wollen wir die im letzten Kapitel besprochene Theorie in einem praktischen Beispiel umsetzen. Wir stellen ein Hatchet Planimeter her, das über gewöhnliche Messungen hinaus zur Veranschaulichung der Fahrradmonodromie verwendet werden kann. Dieses Kapitel beschreibt alle wesentlichen Schritte vom Entwurf bis zur beispielhaften Anwendung des Hatchet Planimeters.

6.1 Konstruktion und Fertigung

Um möglichst präzise Messungen zu ermöglichen, sollte die Länge l des Planimeters so groß wie möglich sein. Wegen der Beschränkungen durch die Ausmaße der Druckfläche des 3D-Druckers, der zur Herstellung des Entwurfs verwendet wird, darf der Planimeterarm nicht länger als etwa 30 cm sein.

In unserem Entwurf liegt die Länge des Planimeterarms bei 28.8 cm. Die sich im rechten Winkel daran anschließenden Fortsätze der Länge 9.0 cm sind auf einer Seite spitz zulaufend (Tracer) und auf der anderen Seite mit einer scharfen Kante versehen.

Der Entwurf ist in Abbildung 6.1 zu sehen. Der zusätzliche Fortsatz auf der Oberseite des Planimeters ermöglicht das Aufsetzen von bis zu vier weiteren Planimeterarmen. Somit kann die Fahrradmonodromie an mehreren Punkten auf dem Kreis gleichzeitig beobachtet werden.

Damit die Fahrrad-Zwangsbedingung erfüllt ist, müssen die Arme auf Seiten der Kante zusätzlich beschwert werden. Dies kann zum Beispiel durch Ankleben kleiner Metallstäbe geschehen.

6.2 Bestimmung der Fahrradmonodromie und Flächenmessungen

In diesem Versuch bestimmen wir die Fahrradmonodromie zu Kreislinien verschiedener Radien mit Mittelpunkt im Ursprung. Wir erinnern uns, dass jede Möbiustransformation, die die Einheitskreisscheibe erhält, geschrieben werden kann als

$$m(z) = e^{i\lambda} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \quad (6.1)$$

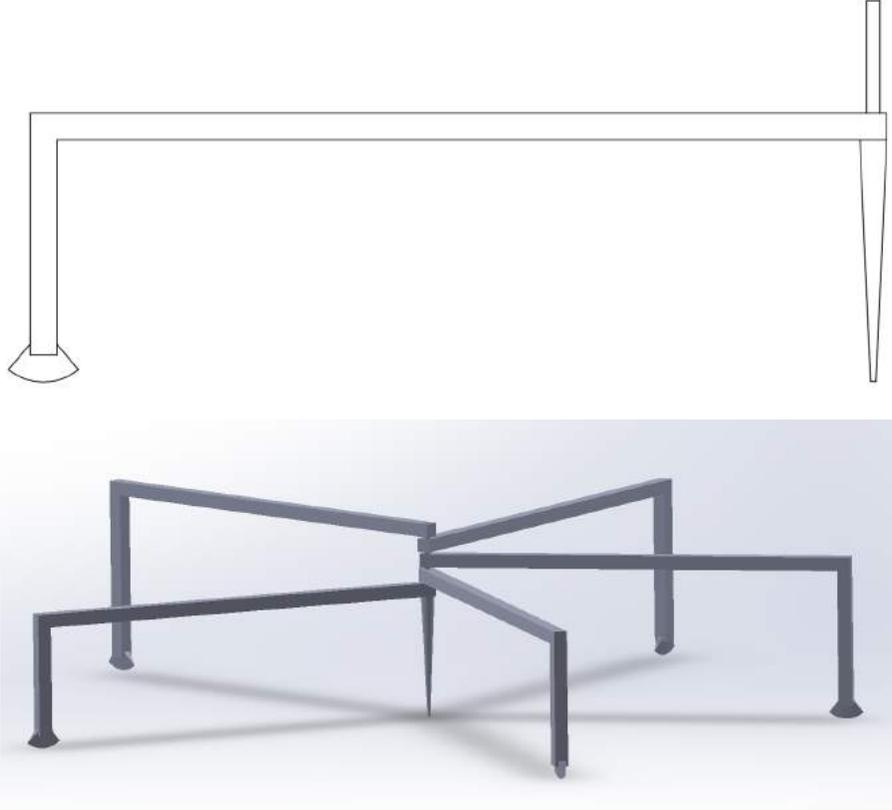


Abbildung 6.1: Oben: Entwurf eines Hachetplanimeters mit Halterung zum Aufsetzen weiterer Planimeterarme. Unten: Hachetplanimeter mit aufgesetzten zusätzlichen Planimeterarmen.

mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$. Durch eine Parameteroptimierung von a und λ können wir also an eine Zahl von Wertepaaren $(z_i, m(z_i))$, die durch Abfahren einer Kurve ausgehend von den $z_i \in S^1$ entstanden sind, eine Möbiustransformation fiten. Diese entspricht dann näherungsweise der Fahrradmonodromie dieser Kurve.

Wir positionieren also das Hinterende des Planimeters auf der x -Achse und das Vorderende auf einem Punkt auf einer der Kreislinien mit Radius 3, 5, 7 oder 10 cm. Danach wird die Kreislinie einmal im Uhrzeigersinn abgefahren. Anfangs- und Endposition des Hinterendes werden markiert und ihr Abstand d gemessen. Dieser lässt sich mittels

$$\Delta\theta = 2 \arcsin\left(\frac{d}{2l}\right) \qquad \Delta(\Delta\theta) = \frac{2\Delta d}{\sqrt{4l^2 - d^2}} \qquad (6.2)$$

in die dazugehörige Verschiebung des Richtungsparameters $\Delta\theta$ umrechnen. Dieses Vorgehen wird für insgesamt 12 verschiedene Punkte gleichen Abstands auf jeder Kreislinie wiederholt. Aufgrund der Symmetrie der Kreislinie entspricht dies bei jeder Wiederholung der Abbildung eines anderen Punkts in S^1 mittels der Fahrradmonodromie.

Startet der Tracer bei $z_i = r e^{i\phi_i}$, so entspricht dies der Abbildung des Punktes $e^{i\theta_i}$ durch die Fahrradmonodromie, wobei $\theta_i = \pi - \phi_i + \arcsin\left(\frac{r}{l} \sin \phi_i\right)$. Der Bildpunkt ist dann $m(z_i) = e^{i(\theta_i + \Delta\theta_i)}$.

Alle Messwerte können in Tabelle 7.5 im Anhang 7 eingesehen werden. Das Ergebnis des Fits ist beispielhaft in Abbildung 6.2 für $r = 7$ cm gezeigt. Alle Fitparameter sind in Tabelle 6.1 aufgeführt. Man betrachte den in Abbildung 6.3 in Abhängigkeit vom Radius aufgetragenen relativen Fehler

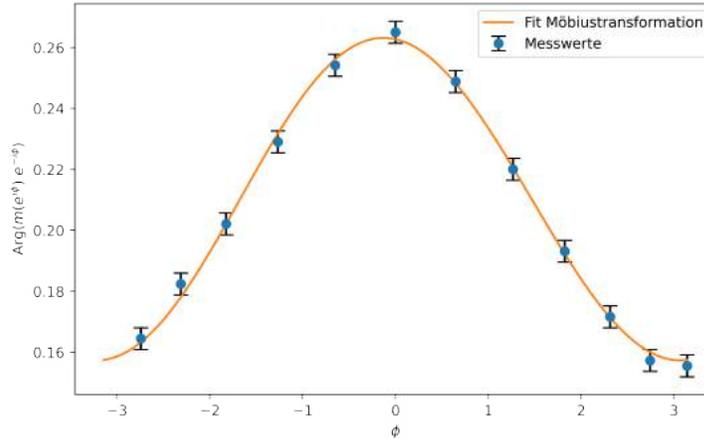


Abbildung 6.2: Messwerte und Fit einer Möbiustransformation zur Fahrradmonodromie einer Kreislinie mit Radius $r = 7$ cm.

der Messung zur jeweiligen Kreislinie. Qualitativ ist zu erkennen, dass dieser für größere Radien wie erwartet abnimmt. Auf eine Bestätigung der Aussagen aus Proposition 49 verzichten wir an dieser Stelle. Wir stellen jedoch fest, dass für den kleinsten Radius $r = 3$ cm der relative Fehler stellenweise wieder zunimmt. Eine mögliche Erklärung ist, dass der relative Fehler der Längenmessungen bei kleinen Radien mit über zehn Prozent erheblich ist. Die Fahrradmonodromie lässt sich somit weniger genau bestimmen. Darüber hinaus ist nicht zu erwarten, dass sich die Größe systematischer Fehler bei der Längenmessung mit dem Kreisradius verringert. Für sehr kleine Radien können diese zunehmend bedeutsam werden. Indem man den gesamten Aufbau inklusive Planimeter in seiner Größe nach oben skaliert, könnte man gegen solche Fehler vorgehen.

Für interessierte LeserInnen bieten sich weitere Experimente, die hier nicht oder nur in geringem Umfang behandelt wurden. So könnte der $1/l$ - beziehungsweise $1/l^2$ -Verlauf für Hachet Planimeter bestätigt werden oder die Fahrradmonodromie für Flächen mit einer größeren Spanne von Flächeninhalten bestimmen, um den Übergang vom elliptischen zum hyperbolischen Fall zu beobachten.

Die Fitparameter aus Tabelle 6.1 können verwendet werden, um zu bestimmen, ob die Fahrradmonodromie zur jeweiligen Kreislinie elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. Das Quadrat der Spur einer Möbiustransformation von der Form aus Gleichung (6.1) errechnet sich zu

$$\text{tr}^2(m) = 4 \frac{1 - \sin^2(\lambda/2)}{1 - |a|^2}.$$

Man kann zeigen, dass m genau dann elliptisch ist, wenn $\text{tr}^2(m) \in [0, 4)$, parabolisch ist, wenn $\text{tr}^2(m) = 4$ und hyperbolisch ist, wenn $\text{tr}^2(m) \in (4, \infty)$ (für einen Beweis siehe Proposition 2.16 in [And99]). Die Fahrradmonodromie ist also in allen vier Fällen elliptisch.

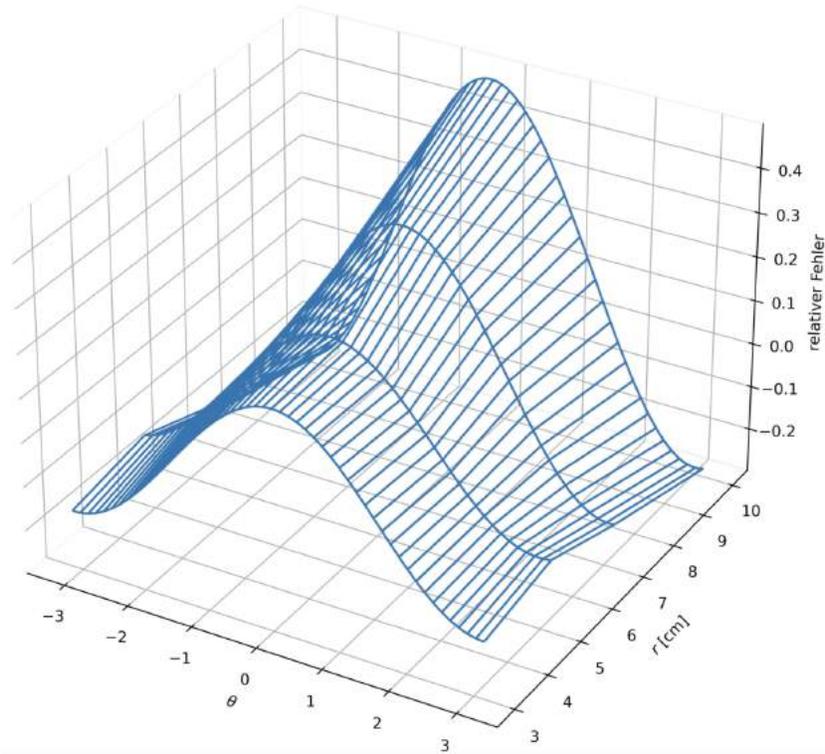
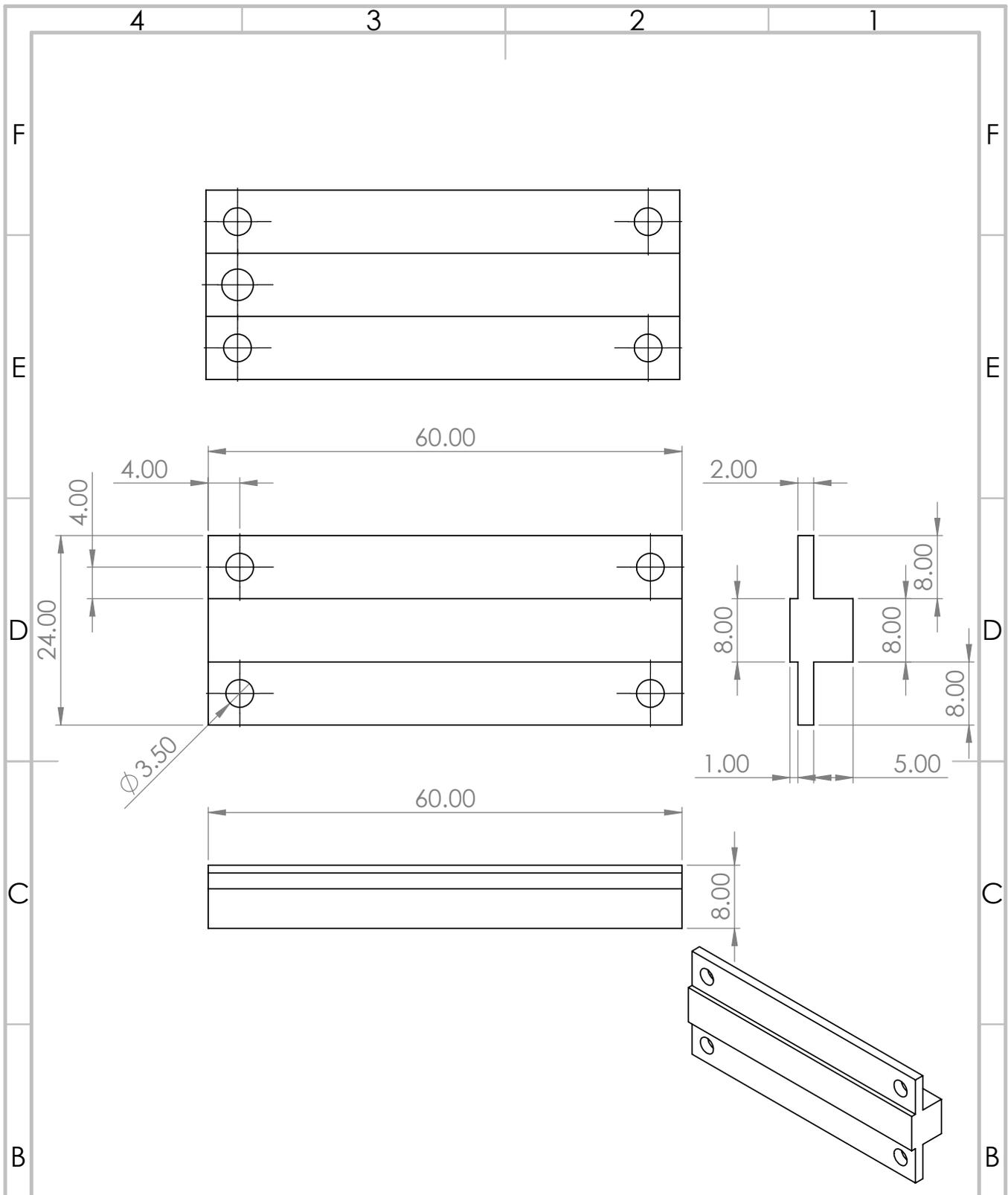


Abbildung 6.3: Relativer Fehler bei der Flächenmessung einer Kreisfläche in Abhängigkeit vom Radius des Kreises und der anfänglichen Planimeterstellung.

r [cm]	a [10^{-3}]	λ [10^{-2}]	$\text{tr}^2(m)$
3	$0.00 + i3.30$	3.67	3.999
5	$1.7 + i8.7$	10.43	3.989
7	$2.7 + i26.3$	21.02	3.959
10	$16.1 + i74.8$	44.06	3.831

Tabelle 6.1: Fitparameter a und λ zur Möbiustransformation von Kreisen verschiedener Radien. In der dritten Spalte stehen die dazugehörigen Spurquadrate gerundet auf drei Nachkommastellen.



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

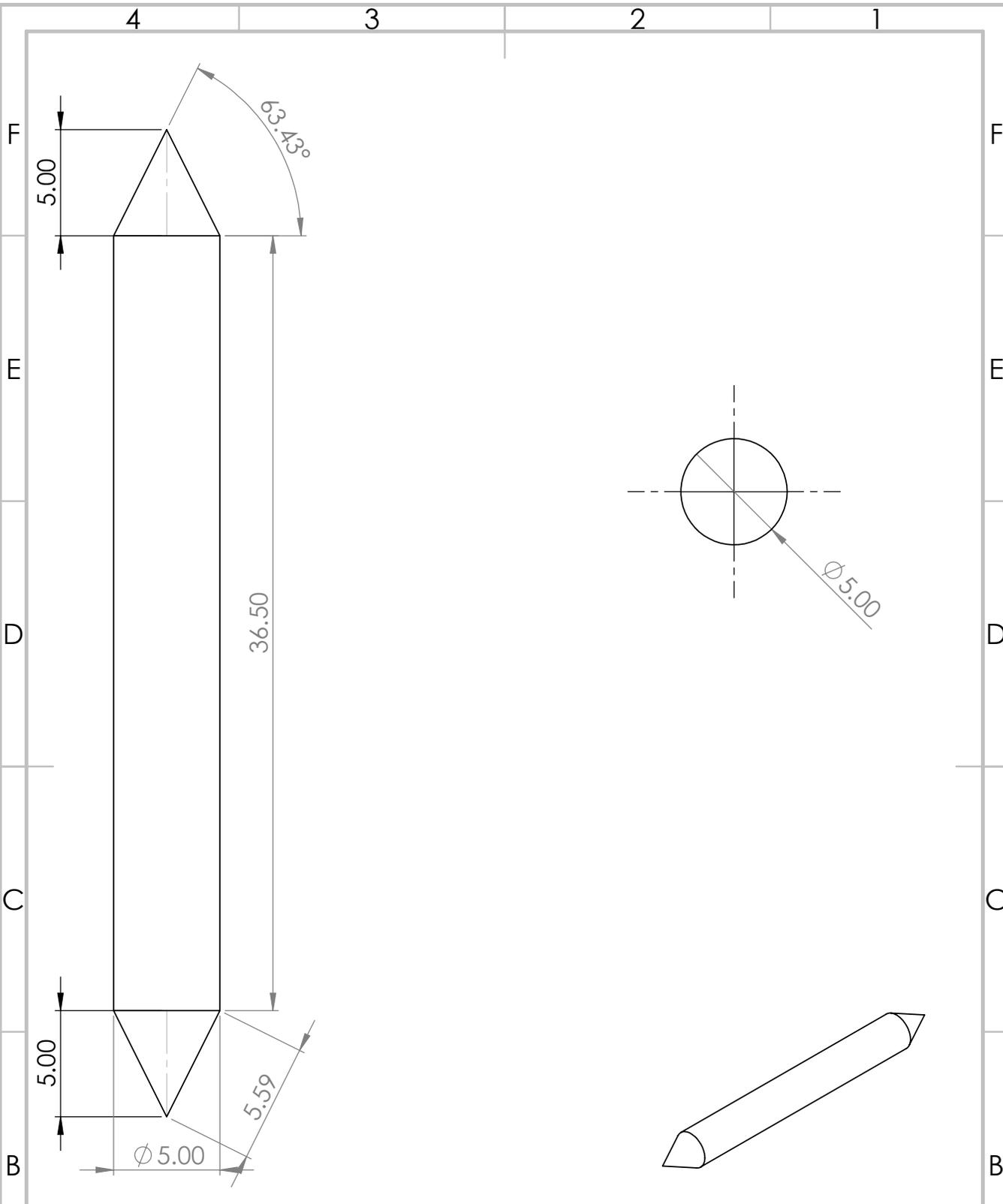
DWG NO.

Abdeckung

A4

SCALE:1:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

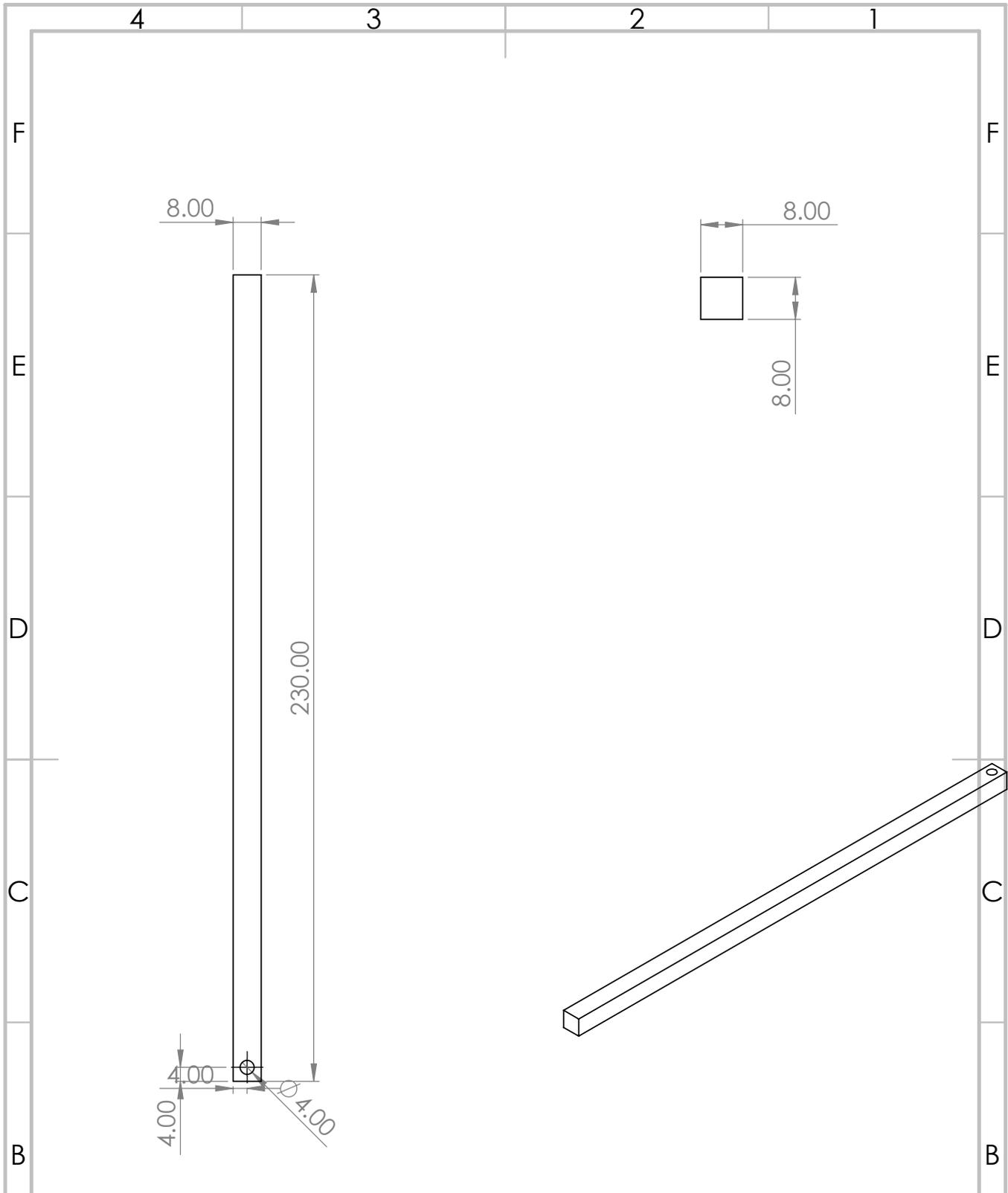
DWG NO.

Achse

A4

SCALE:2:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

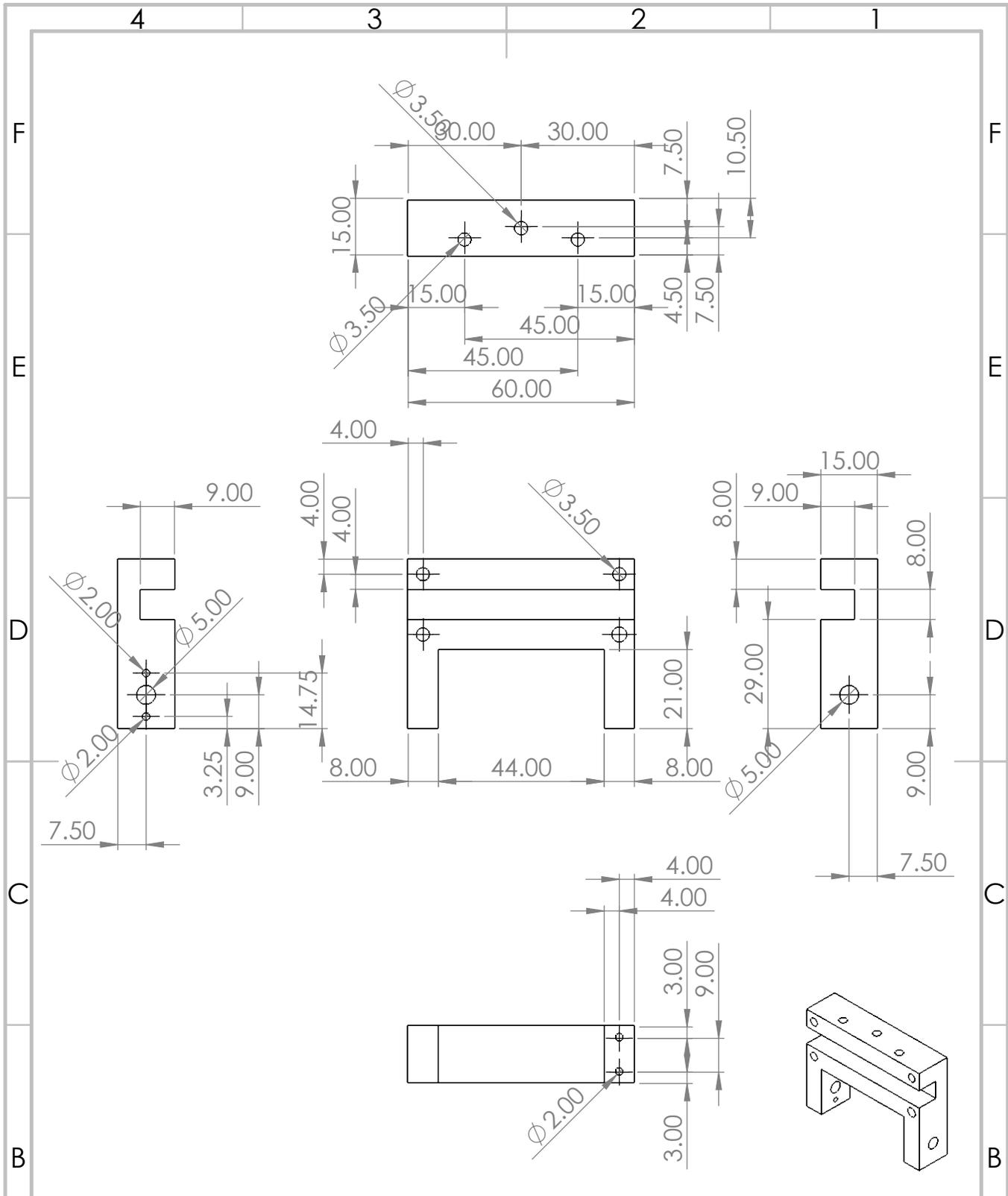
DWG NO.

Fahrarm

A4

SCALE:1:2

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE	
DRAWN				
CHK'D				
APP'VD				
MFG				
Q.A				

TITLE:

DWG NO.

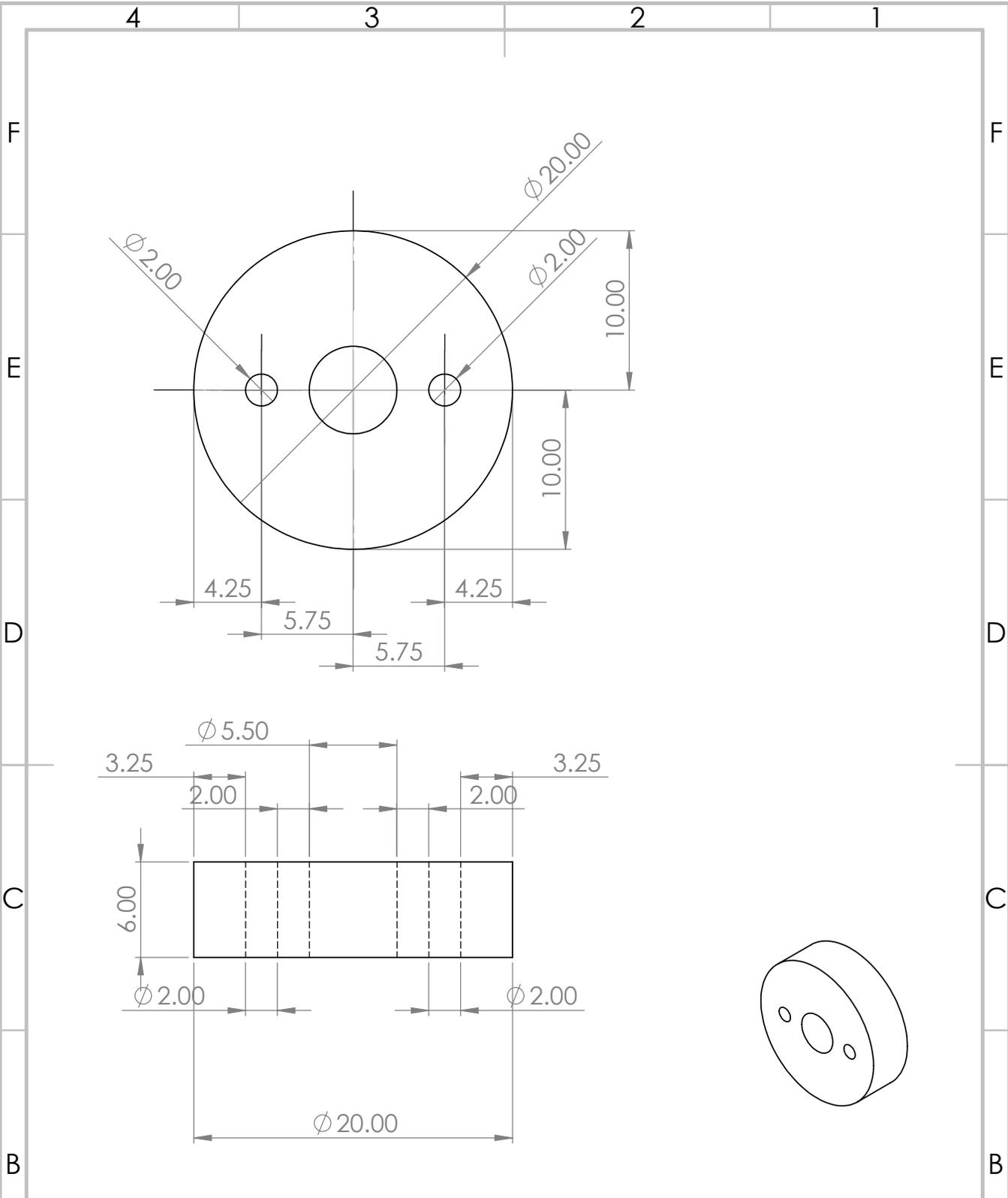
Hauptteil

A4

WEIGHT:

SCALE:1:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

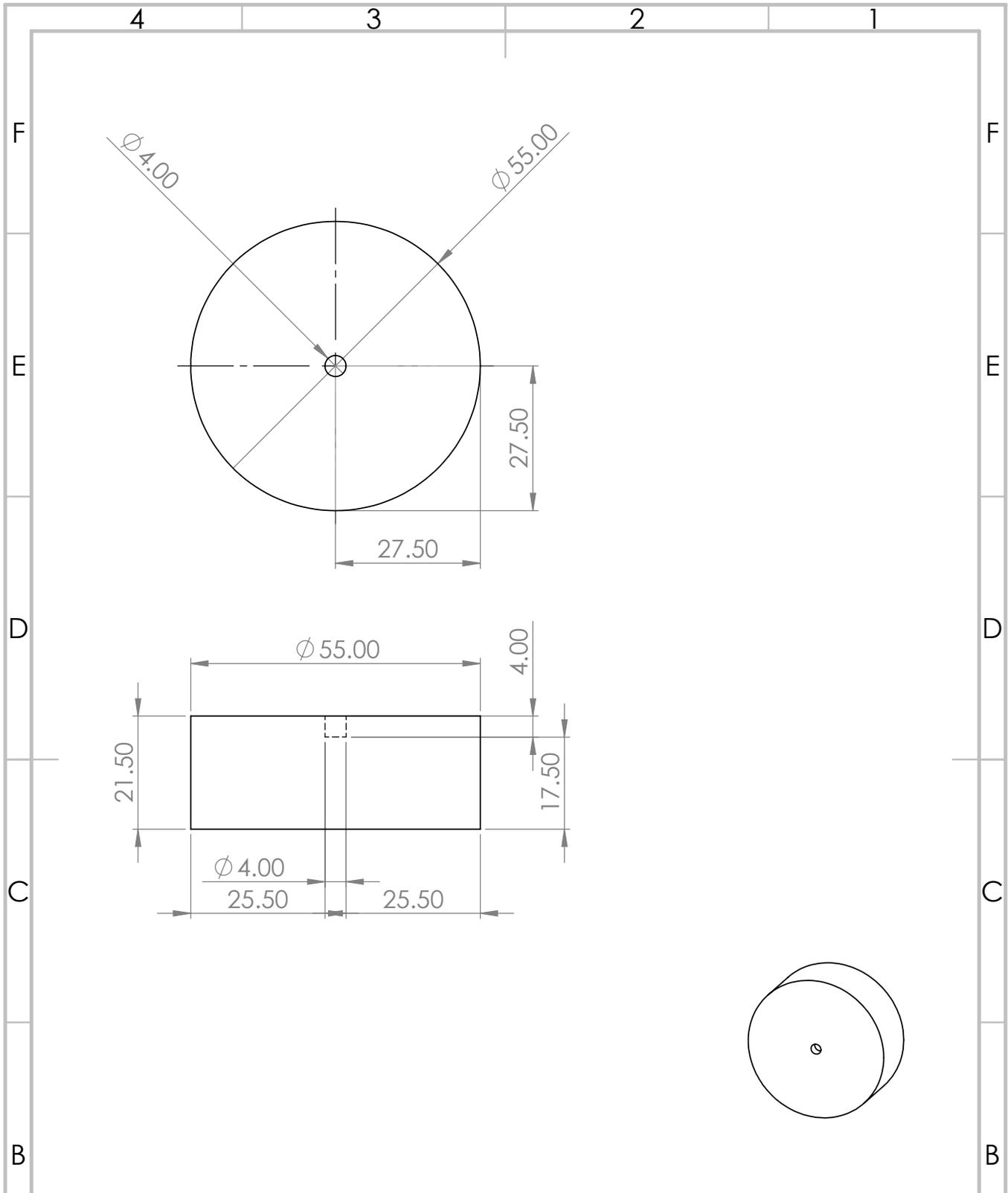
DWG NO.

Messrad

A4

SCALE:2:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

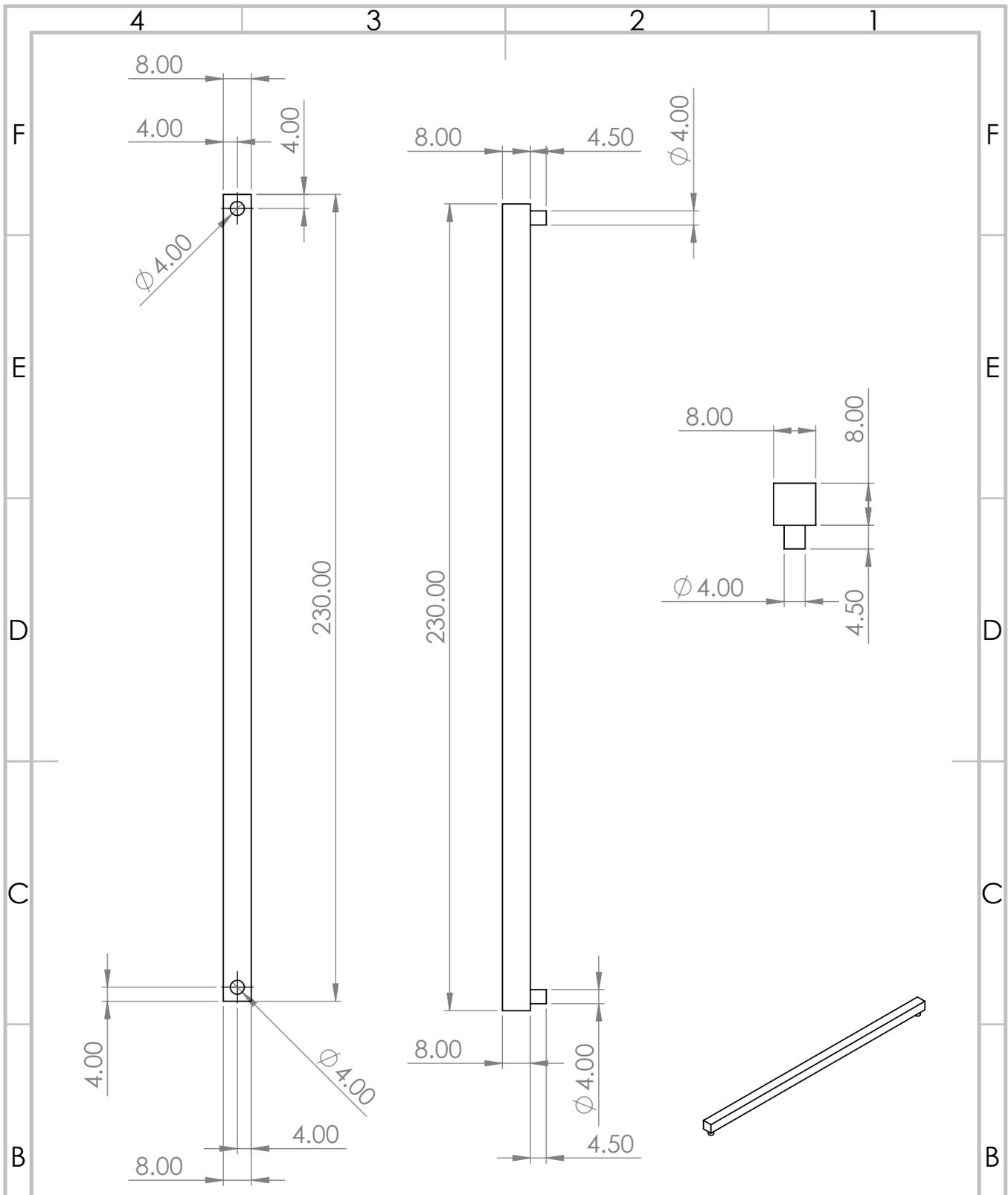
DWG NO.

Pol

A4

SCALE:1:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE	
DRAWN				
CHK'D				
APP'VD				
MFG				
Q.A				
				MATERIAL:
				WEIGHT:

TITLE:

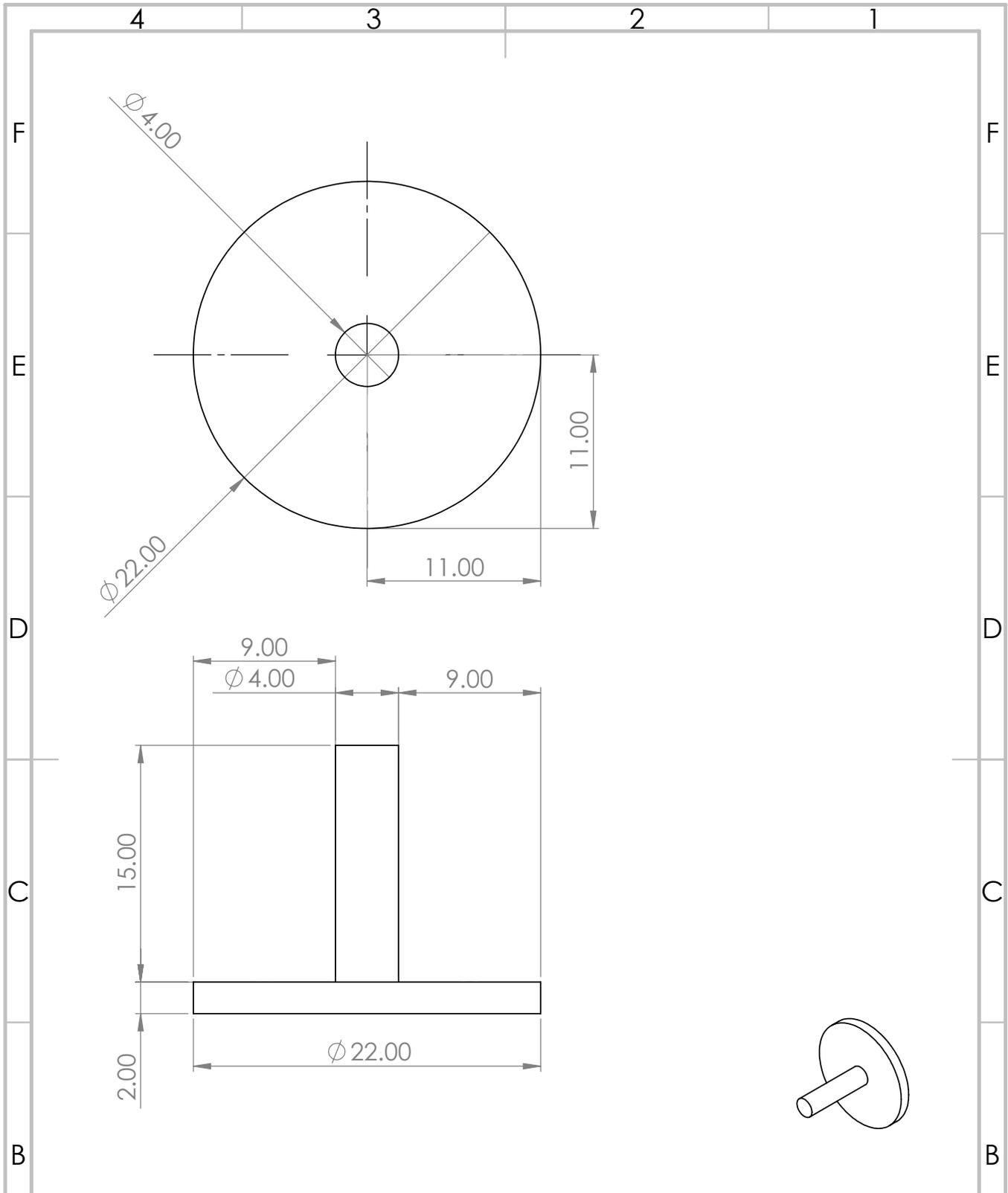
DWG NO.

Polarm

A4

SCALE:1:5

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

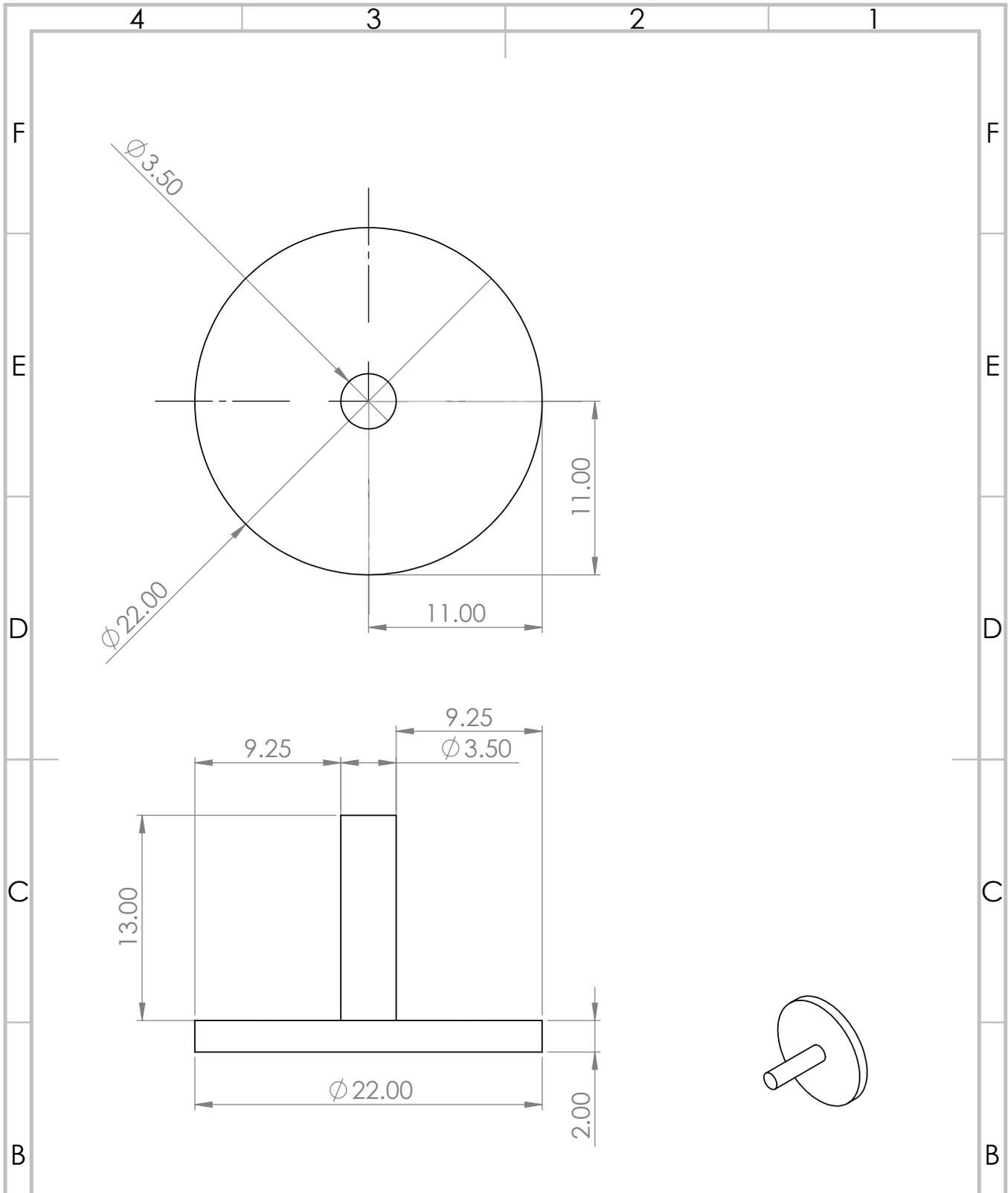
DWG NO.

Rundenzähler

A4

SCALE:2:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APPVD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

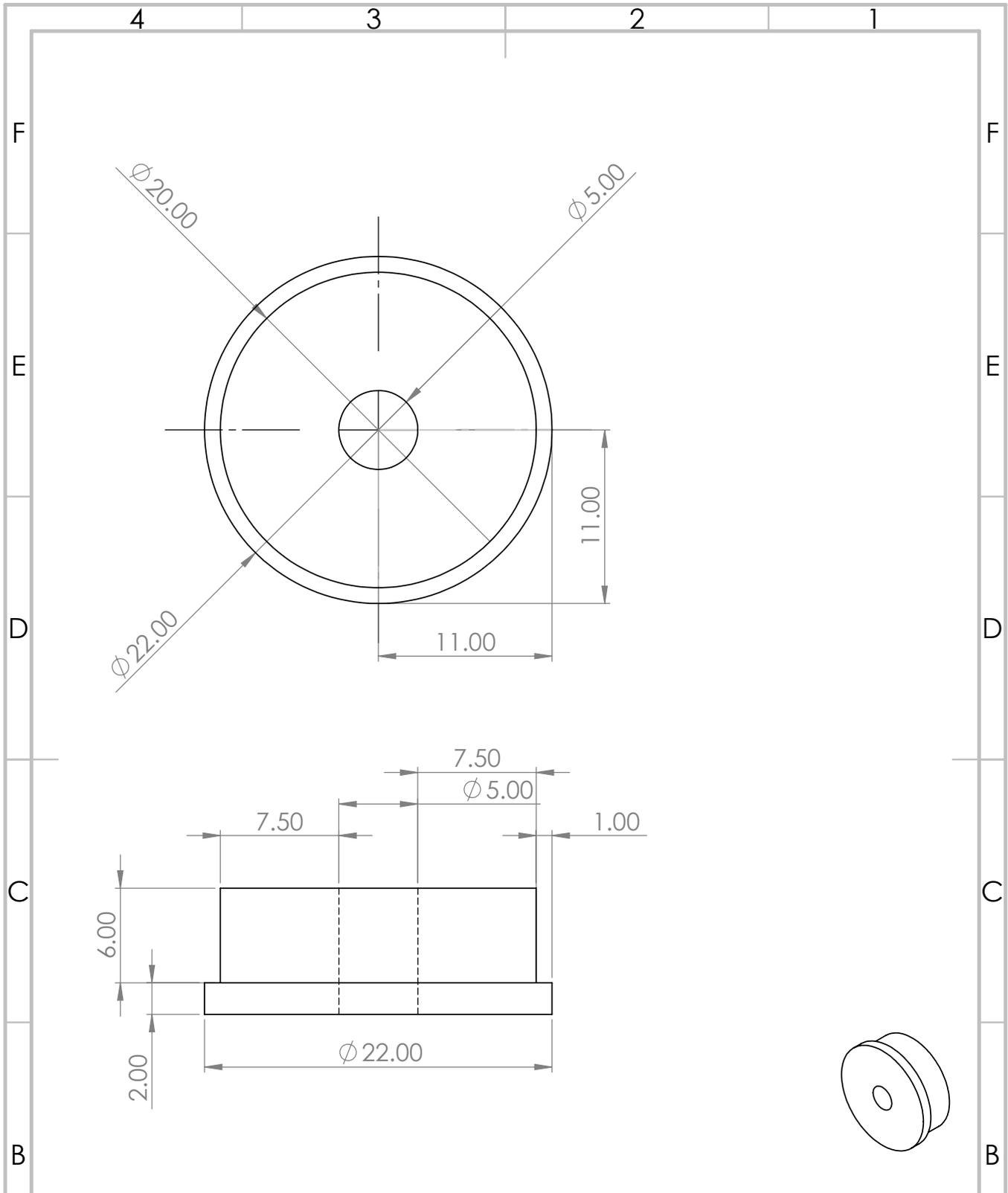
DWG NO.

Stuetzrad

A4

SCALE:2:1

SHEET 1 OF 1



UNLESS OTHERWISE SPECIFIED:
 DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS
 SURFACE FINISH:
 TOLERANCES:
 LINEAR:
 ANGULAR:

FINISH:

DEBURR AND
 BREAK SHARP
 EDGES

DO NOT SCALE DRAWING

REVISION

	NAME	SIGNATURE	DATE		
DRAWN					
CHK'D					
APP'VD					
MFG					
Q.A					
				MATERIAL:	
				WEIGHT:	

TITLE:

DWG NO.

Zaehlrاد

A4

SCALE:2:1

SHEET 1 OF 1

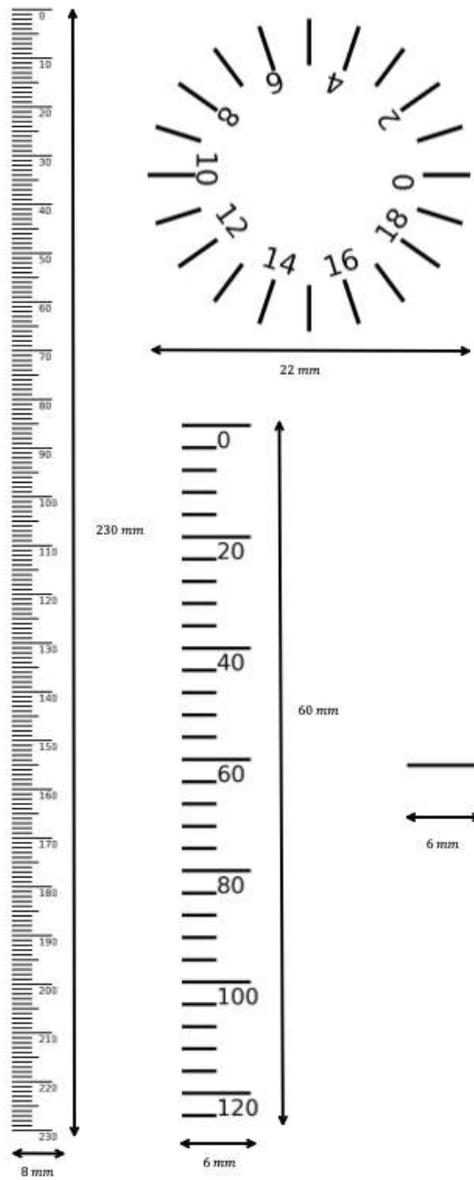


Abbildung 7.1: Vorlagen für Skalen und Ablesestriche für das selbstgebaute polare Planimeter. Die Skala für den Fahrarm (links) wurde erst nach der Fertigstellung des Planimeters erstellt und wurde noch nicht zum Planimeter hinzugefügt.

A.2: Messwerteübersicht

Position Nr.	2	2	2	5	5	5
A_1 [cm ²]	374	372	374	380	380	380
A_2 [cm ²]	372	372	372	376	376	380

Tabelle 7.1: Messung zur Kalibrierung des polaren Planimeters. A_1 , A_2 bezeichnen die Messwerte für die Einzelmessungen in beiden möglichen Planimeterstellungen. Der Messfehler beträgt 3.5 cm².

Position Nr.	1	2	3	4	5	6
A_1 [cm ²]	390	388	392	394	392	392
A_2 [cm ²]	390	392	392	392	392	394

Tabelle 7.2: Kontrollmessung nach der Kalibrierung des polaren Planimeters. A_1 , A_2 bezeichnen die Messwerte für die Einzelmessungen in beiden möglichen Planimeterstellungen. Der Messfehler beträgt 3.5 cm².

A [cm ²]	124	248	496	992	1986	3968
A_1 [cm ²]	124	252	502	998	1986	3962
A_2 [cm ²]	122	246	492	990	1990	3960

Tabelle 7.3: Flächenmessungen zur Bestimmung des Messfehlers des polaren Planimeters. A bezeichnet die exakte Fläche, A_1 und A_2 die Messungen in beiden möglichen Stellungen des Planimeters.

r [cm]	4.10	5.00	10.00	15.00	20.00	25.00	39.50
\mathcal{PM} [cm ²]	-2828 ± 5	-2800 ± 5	-2560 ± 4	-2168 ± 4	-1588 ± 3	-900 ± 2	2048 ± 4

Tabelle 7.4: Flächenmessungen zur Bestimmung des Flächeninhalts des neutralen Kreises. Der Fehler von \mathcal{PM} wurde mittels Gleichung 4.1 berechnet. Die Ungenauigkeiten beim Setzen der Bohrung wurden als $\Delta r = 1$ mm angenommen.

r [cm]	Pos. Nr. [.]	d [cm]	$\Delta\theta$ [rad]	r [cm]	Pos. Nr. [.]	d [cm]	$\Delta\theta$ [rad]
3	1	0.85	0.030 ± 0.004	7	1	4.35	0.156 ± 0.004
	2	0.90	0.032 ± 0.004		2	4.40	0.157 ± 0.004
	3	0.90	0.032 ± 0.004		3	4.80	0.172 ± 0.004
	4	1.05	0.038 ± 0.004		4	5.40	0.193 ± 0.004
	5	1.10	0.039 ± 0.004		5	6.15	0.220 ± 0.004
	6	1.15	0.041 ± 0.004		6	6.95	0.249 ± 0.004
	7	1.20	0.043 ± 0.004		7	7.40	0.265 ± 0.004
	8	1.15	0.041 ± 0.004		8	7.10	0.254 ± 0.004
	9	1.20	0.043 ± 0.004		9	6.40	0.229 ± 0.004
	10	1.05	0.038 ± 0.004		10	5.65	0.202 ± 0.004
	11	0.80	0.029 ± 0.004		11	5.10	0.182 ± 0.004
	12	0.85	0.030 ± 0.004		12	4.60	0.164 ± 0.004
5	1	2.40	0.086 ± 0.004	10	1	8.10	0.290 ± 0.007
	2	2.35	0.084 ± 0.004		2	8.15	0.292 ± 0.007
	3	2.55	0.091 ± 0.004		3	8.75	0.314 ± 0.007
	4	2.85	0.102 ± 0.004		4	10.05	0.361 ± 0.007
	5	3.15	0.113 ± 0.004		5	12.40	0.447 ± 0.007
	6	3.15	0.113 ± 0.004		6	14.85	0.537 ± 0.007
	7	3.25	0.116 ± 0.004		7	15.75	0.570 ± 0.007
	8	3.45	0.123 ± 0.004		8	15.95	0.578 ± 0.007
	9	3.20	0.114 ± 0.004		9	14.35	0.518 ± 0.007
	10	3.00	0.107 ± 0.004		10	11.85	0.426 ± 0.007
	11	2.75	0.098 ± 0.004		11	9.25	0.332 ± 0.007
	12	2.40	0.086 ± 0.004		12	8.35	0.299 ± 0.007

Tabelle 7.5: Messwerte zur Bestimmung der Fahrradmonodromie für Kreise verschiedener Radien. Die Messwerte d entsprechen dem Abstand des Hinterrades vor und nach Abfahren der Kreislinie, $\Delta\theta$ und der dazugehörige Fehler wurden mittels (6.2) berechnet. Für d wurde bei $r = 10$ cm ein Fehler von 2 mm und sonst 1 mm angenommen. Die Startposition bei der Messung ist $re^{i\pi/6j}$, wobei j der Positionsnummer entspricht.

Danksagungen

Zum Schluss möchte ich all jenen danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit und meinem bisherigen Studium unterstützt haben.

An erster Stelle gilt mein Dank Lucas, der sich immer wieder sehr viel Zeit genommen hat, um mir bei Verständnisproblemen und anderen Unklarheiten zu helfen.

Vielen Dank auch an Andreas und Stefan aus der mechanischen Werkstatt des Physikalischen Instituts, die mir die Anfertigung des polaren Planimeters ermöglicht haben und an Dia für die Hilfe beim 3D-Druck der Hatchet Planimeter.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Partnerin Solveig, meiner Familie und meinen FreundInnen für die Unterstützung während der gesamten Zeit meines bisherigen Studiums bedanken.

Hi :)

Achso, ok, dann warst du schneller als ich gedacht habe. Die letzten Seiten hier bekommen noch eine etwas andere Reihenfolge

Hi

Hab grad fertig durchgelesen und angemalt. Habs aber physisch gemacht, i.e., du könntest etwas papier bei mir abholen. <- Alles klar. Wann soll ich vorbeikommen?

:D

Ist ok, wenn noch etwas ändert ist halt anders MDie version die ich gelesen hab ist von Freitag.

Der Text ist jetzt allgemein echt gut, das meiste sind typos.

Wollen wir morgen treffen um noch die letzten paar fragen zu klären? Z.b. um 4, wenn das seminar gewsen wäre? Super! Bis dann.

PS: das ist die chaotischste chatart der geschichte :D Gute Nacht dir auch. PPS: Wenn du das im dokument lässt gibts nen bonuspunkt.

Jou, gerne! Dann bis morgen :) Gute Nacht! Sehr! :D xD

Cool. Freut mich! :)

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

A handwritten signature in blue ink, consisting of a stylized 'A' followed by a long horizontal stroke that ends in a loop.

Heidelberg, den 20.02.2022

Literatur

- [Mae84] Ryuji Maehara. “The Jordan Curve Theorem Via the Brouwer Fixed Point Theorem”. In: *The American Mathematical Monthly* 91.10 (1984), pp. 641–643. DOI: [10.1080/00029890.1984.11971517](https://doi.org/10.1080/00029890.1984.11971517). URL: <https://doi.org/10.1080/00029890.1984.11971517>.
- [MAL89] D.H. MALING. “17 - Area Measurement by Planimeter”. In: *Measurements from Maps*. Ed. by D.H. MALING. Pergamon, 1989, pp. 351–393. ISBN: 978-0-08-030290-4. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-030290-4.50023-2>.
- [CA92] R. Cooke and V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer Textbook. Springer Berlin Heidelberg, 1992. ISBN: 9783540548133. URL: <https://books.google.de/books?id=JUoyq1W7PZgC>.
- [Foo98] Robert L. Foote. “Geometry of the Prytz planimeter”. In: *Reports on Mathematical Physics* 42.1 (1998). Proceedings of the Pacific Institute of Mathematical Sciences Workshop on Nonholonomic Constraints in Dynamics, pp. 249–271. ISSN: 0034-4877. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(98\)80013-X](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(98)80013-X).
- [And99] James W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, London, 1999. ISBN: 978-1-4471-3987-4. DOI: [10.1007/978-1-4471-3987-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3987-4).
- [Car04] C. Care. *Illustrating the History of the Planimeter*. 2004. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.522.4918&rep=rep1&type=pdf>.
- [FS07] Robert L. Foote and Ed Sandifer. “Area Without Integration: Make Your Own Planimeter”. In: *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics*. Ed. by AmyEditor Shell-Gellasch. Mathematical Association of America, 2007, pp. 71–88. DOI: [10.5948/UP09780883859766.010](https://doi.org/10.5948/UP09780883859766.010).
- [AE08a] H. Amann and J. Escher. *Analysis II*. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Basel, 2008. ISBN: 9783764371050. URL: <https://books.google.de/books?id=izgYzhnyacIC>.
- [AE08b] H. Amann and J. Escher. *Analysis III*. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Basel, 2008. ISBN: 9783764388843. URL: <https://books.google.de/books?id=cVsiBAAAQBAJ>.
- [FLT13] Robert Foote, Mark Levi, and Serge Tabachnikov. “Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old Conjecture”. In: *The American Mathematical Monthly* 120.3 (2013), pp. 199–216. DOI: [10.4169/amer.math.monthly.120.03.199](https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.03.199). eprint: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.4169/amer.math.monthly.120.03.199>. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.120.03.199>.
- [Fre18] Heinrich Freistühler. “Skript zur Vorlesung: Funktionentheorie”. In: (2018). URL: https://www.math.uni-konstanz.de/~freist/Skript_FT18.pdf.
- [Egg20] John Eggers. “A Closer Look at the Compensating Polar Planimeter”. In: *The College Mathematics Journal* 51.2 (2020), pp. 105–116. DOI: [10.1080/07468342.2020.1702852](https://doi.org/10.1080/07468342.2020.1702852).
- [Gmb] Haff GmbH. *Webseite Gebrüder Haff GmbH*. Zugriff: 05.12.2021. URL: <https://www.haff.de/mechanische-planimeter/>.
- [Wag] Jens Wagner. *Skript zum physikalischen Praktikum für Physikstudierende*. 2017.